Dinâmica dos Sistemas Biológicos e Fisiológicos

Módulo da disciplina de

Modelos Computacionais dos Processos Fisiológicos

Licenciatura em Engenharia Biomédica

António Dourado Pereira Correia
Departamento de Engenharia Informática
FCTUC
2022

Programa

1. Introdução à Teoria Geral dos Sistemas. Noção de sistema. Principais características dos sistemas. Hierarquia de sistemas. Sistemas dinâmicos.
2. Modelização de sistemas por equações diferenciais.
3. Função de transferência e dinâmica de sistemas. Resposta temporal de sistemas dinâmicos
4. Representação no espaço de estados. Estados singulares e linearização.
5. Dinâmica de sistemas não lineares. Sistemas caóticos e fractais e sua aplicação à Biologia e Medicina.

Simulação computacional de casos de estudo em ambiente Matlab/Simulink.

Modo de funcionamento

- Aulas teóricas de discussão da matéria (conveniente estudo prévio, materiais de estudo já disponíveis)

- Aulas práticas de implementação computacional e simulação em Matlab/Simulink

  Modo presencial

Bibliografia

- *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences*, Frank C. Hoppensteadt, Charles S. Peskin, Springer Verlag, 2000.
- *Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation* by Michael Khoo; John Wiley and Sons, 1999.
- *Chen, C.T. Systems and Signals Analysis*, 2nd Ed, Saunders College Bupl, 1994 *Chen, C.T. Systems and Signals Analysis*, 2nd Ed, Saunders College Publ, 1994
- *Análise de Sistemas Lineares*, Ribeiro, M. Isabel., IST Press 2002.
- *Sistemas de Controlo Automático Carvalho, J. L. M.*. LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.
- *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals, (Biomedical Engineering S.)*, G D Baura, John Wiley and Sons, 2002.
- *Nonlinear Modeling of Physiological Systems* , Marmarelis, John Wiley and Sons, 2004.
- *The Biomedical Engineering Handbook (Electrical Engineering Handbook)*,by Joseph D. Bronzino (Editor), Springer Verlag, 2000
- *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, Hoppensteadt, Frank C., Springer 2003.
- *Fractal Physiology and Chaos in Medicine (Studies of Nonlinear Phenomena in Life Science)*, B.J. West, World Scientific Publishing, 1990.
- Internet (vários sítios).

Capítulo 1

Noções Fundamentais de Sistemas

1.1 Sistemas, elementos, relações

1.2. Retroação ou realimentação (*feedback*)

1.3 Ambiente, sistemas fechados, sistemas abertos e homeostasia

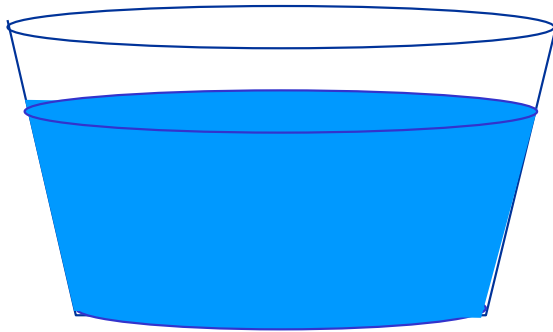
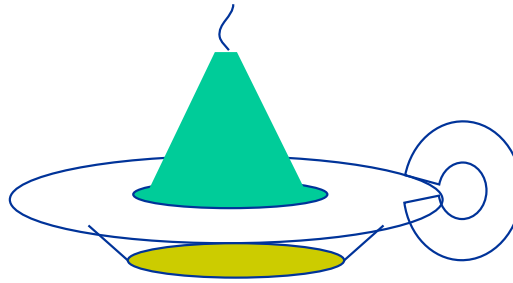
1.4 Entropia e neguentropia

1.5 Estado e espaço de estados

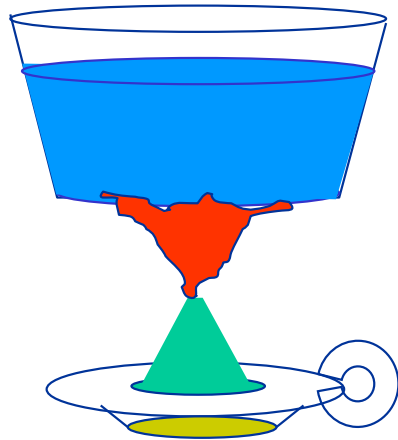
1.6 Autopoiese, adaptação, cibernética

1.7. Uma hierarquia de sistemas

1. 8. Sistemas dinâmicos: noção formal

1.9. Conclusão

Exemplo 1

... separados não constituem um sistema.

Exemplo 1

Elementos: o vaso, a água, a lamparina.

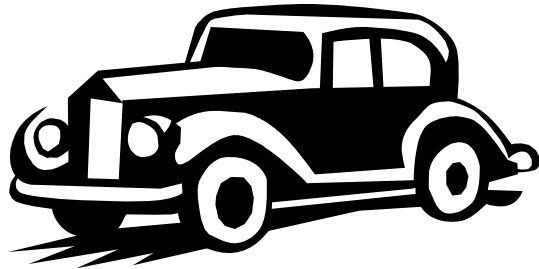
Comportamento: aquece a água

Atributo: temperatura, ºC.

- separados, os elementos não constituem um sistema.
- montados, constituem um sistema.
- a montagem consiste no estabelecimento de relações entre os elementos (proximidade, transmissão de calor, etc.).

- efeito de sinergia: o todo é maior do que a soma das partes.

Exemplo 2

Um automóvel

Elementos: as suas numerosas partes.

Comportamento: posição, velocidade, aceleração.

- desmontadas: não constituem um sistema.
- montadas: constituem um sistema.
- a montagem consiste no estabelecimento de relações entre os elementos.

- efeito de sinergia: o todo é maior do que a soma das partes.

Exemplo 3

Um computador

Comportamento: velocidade, capacidade de armazenamento, temperatura, ...

Elementos: as suas numerosas partes (CPU, discos, teclado, monitor, etc.).

- desmontadas: não constituem um sistema.

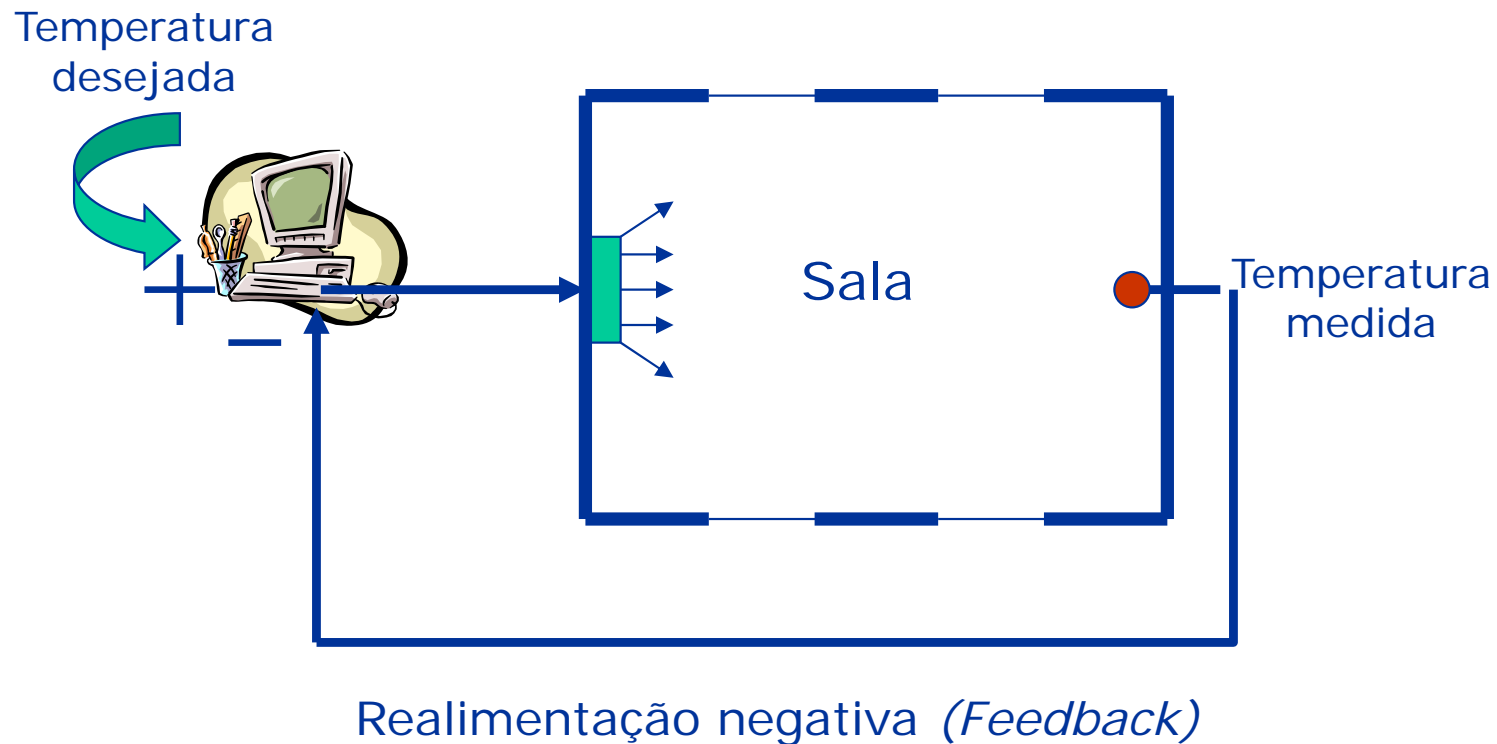
- montadas: constituem um sistema.

- a montagem consiste no estabelecimento de relações entre os elementos.

- efeito de sinergia: o todo é maior do que a soma das partes.

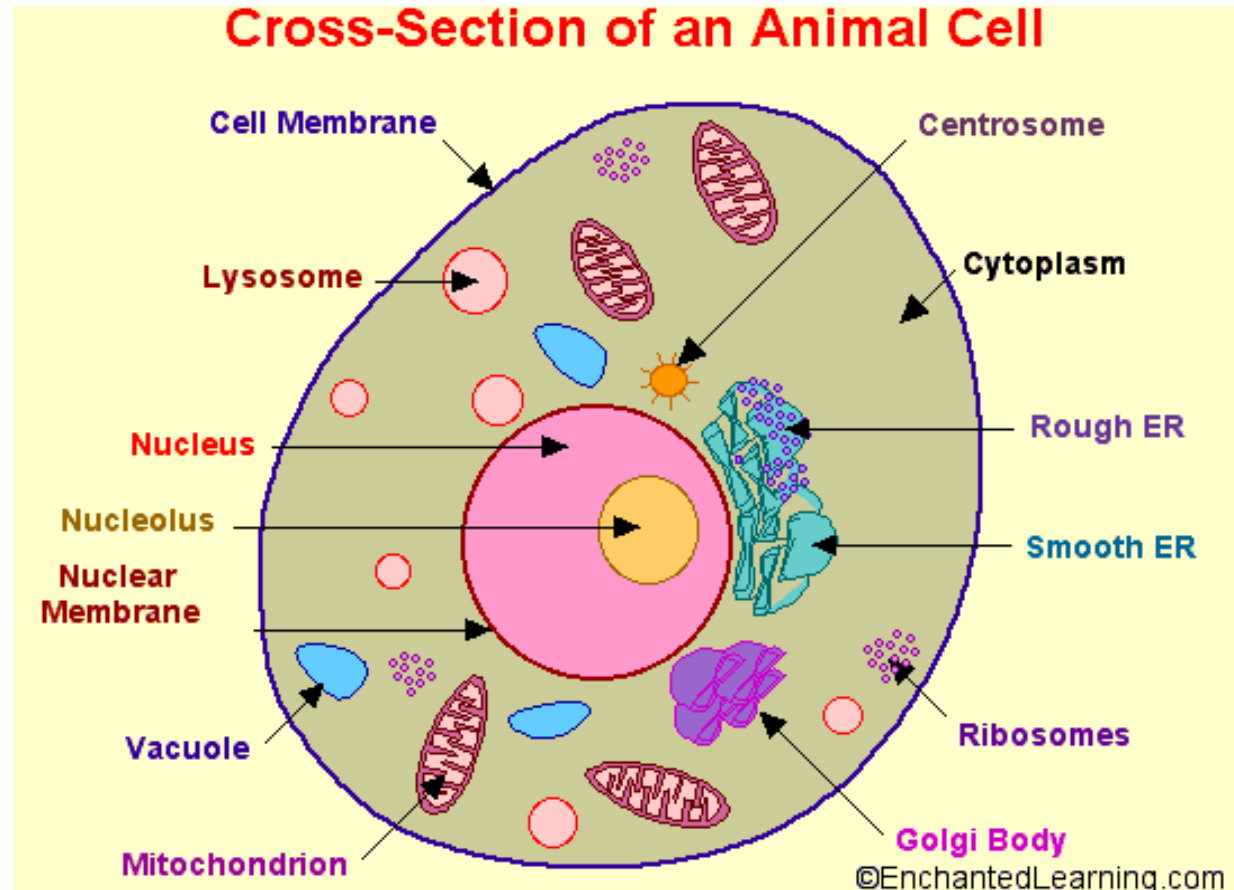
Exemplos 4

Sistema de ar condicionado

Realimentação negativa *(Feedback)*

Sistema de controlo, servomecanismo, regulador.

Exemplos 5

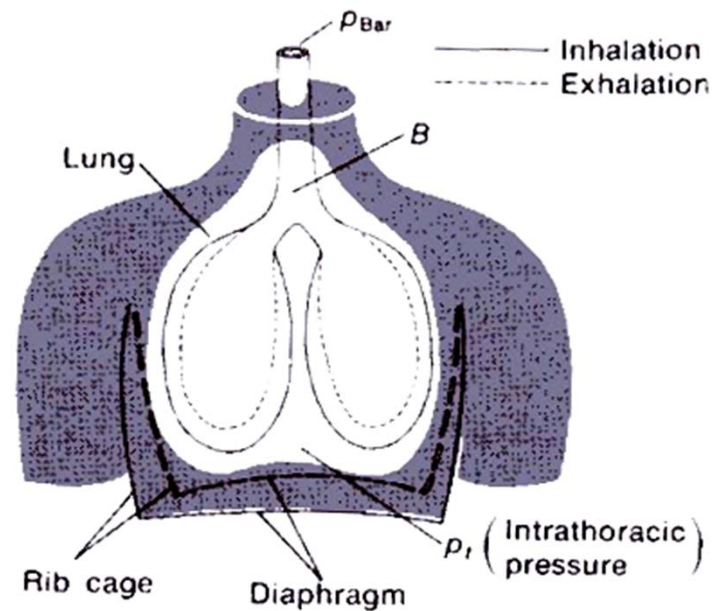
Célula animal

(de http://www.enchantedlearning.com/subjects/biology/cells/)

Exemplo 6. Sistemas fisiológicos

Uma célula

O coração

O sistema respiratório

O sistema nervoso

Exemplo 7. Sistema humano

Uma pessoa, a sua história, os seus sonhos e as suas utopias

Exemplo 8. Sistemas sociais

Um coro

Exemplo 9. Sistemas económico-sociais

Uma empresa

Uma cidade

Um país

... ...

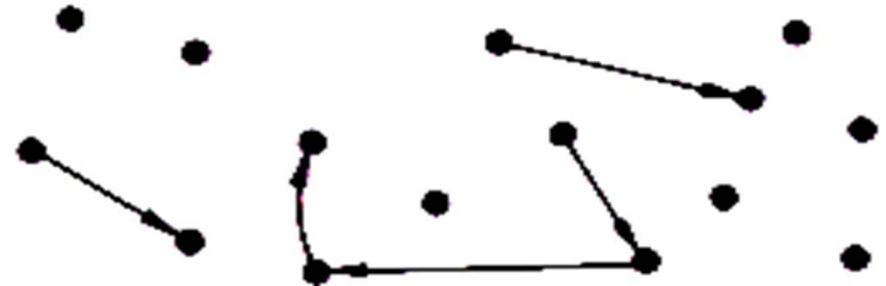
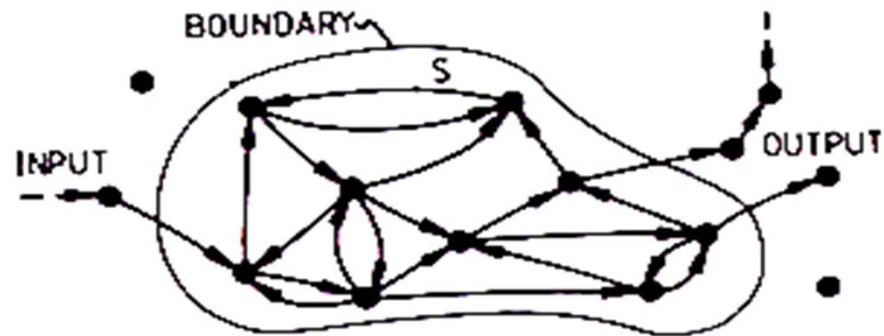
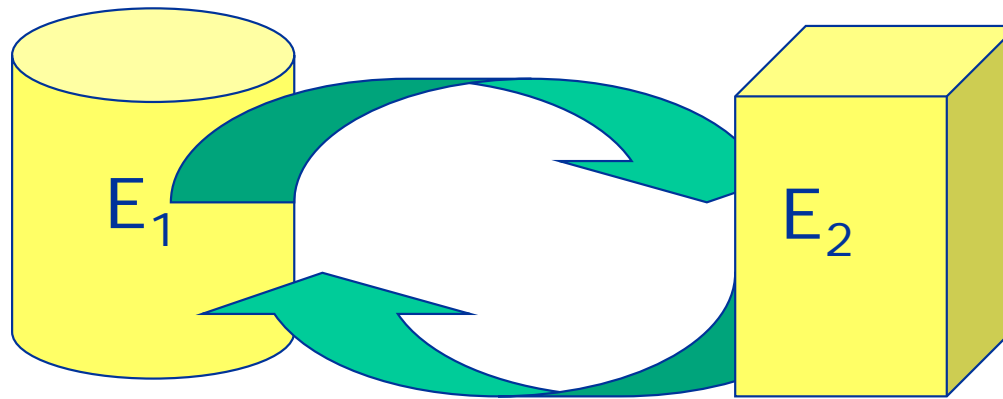
... níveis de complexidade crescente.

Sistema: definição formal

- Um conjunto de elementos (componentes) relacionados e interagindo entre si, num todo organizado, de modo a desempenharem alguma função.

Elemento : algum fenómeno da vida natural ou social, ou a sua representação, que tem certos atributos que podem variar ao longo do tempo em consequência do seu próprio comportamento.

Não é sistema

Não é sistema

É sistema

(De Flood and Carson)

Existe uma relação entre os elementos E1 e E2 (de um sistema) se o comportamento de E1 é influenciado ou controlado pelo de E2 e se o comportamento de E2 é influenciado ou controlado pelo de E1.

Um atributo de um elemento é uma propriedade característica do elemento (cor, tamanho, peso, temperatura, etc.).

Um atributo de uma relação é uma qualidade característica da relação (intensidade, velocidade de comunicação, etc.).

No estudo de sistemas dinâmicos a evolução dos atributos assume um aspecto fundamental, dado que é essa mudança que exprime a dinâmica.

1.2. Retroação ou realimentação (*feedback*)

existe quando a influência de um elemento inicial se repercute noutros elementos e através de uma série de relações o efeito dessa influência inicial acaba por se repercutir sobre o elemento inicial.

Exemplo: a dinâmica de um par predador-presa:

- Um aumento da vegetação produz um aumento explosivo da população de um pequeno herbívoro ,
- o que possibilita que a população de um carnívoro, predador do herbívoro, exploda também,
- e em consequência a população do herbívoro diminui.
- O aumento da população de herbívoros retroagiu negativamente sobre si própria através das suas relações com a população dos carnívoros.

Retroação negativa

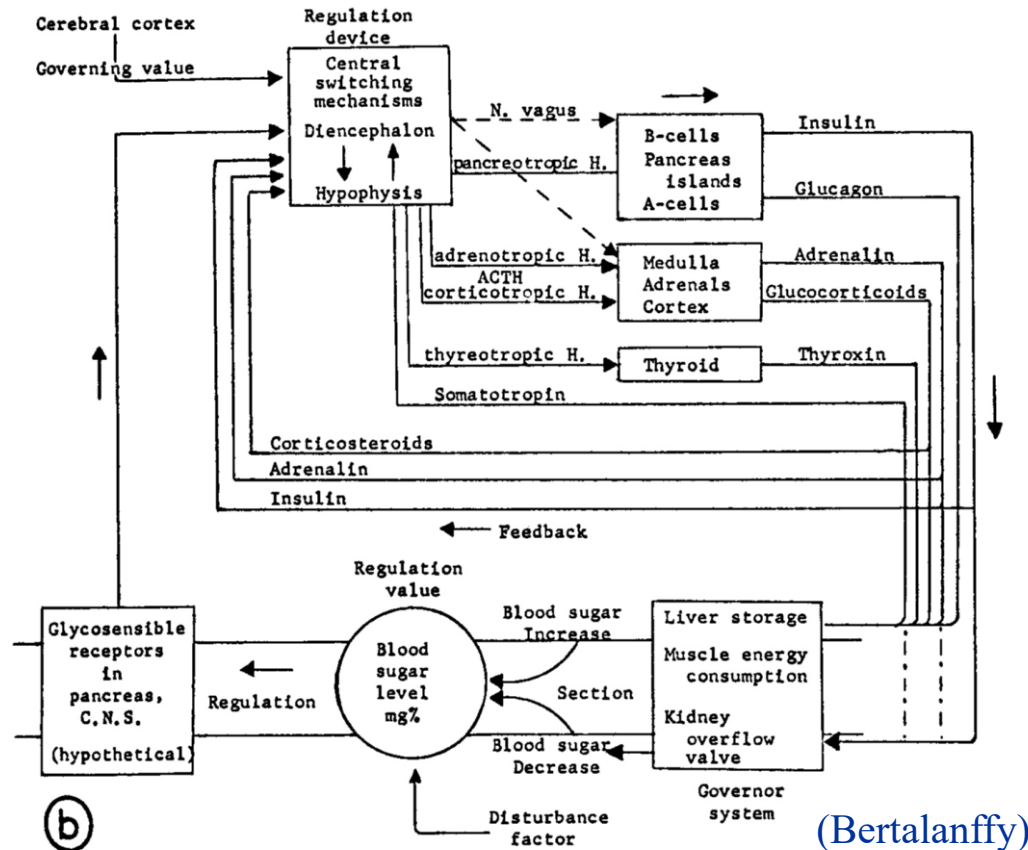
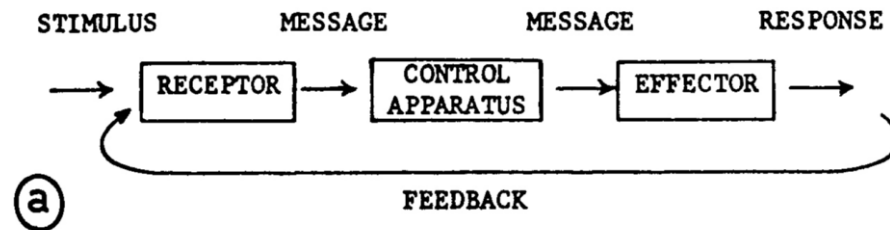
- Para atingir objectivos estabelecidos através de parâmetros de controlo (quer feitos pelo homem, quer naturais)

- Se um sistema se afasta do seu regime estacionário, ou se executa uma acção de controlo, ou gera-se retroacção natural para reverter a situação.

No caso do par predador - presa

A retroação existe no corpo humano em muitas situações, de complexidade variável.

(Bertalanffy)

Regulação do açúcar no sangue

Retroação positiva

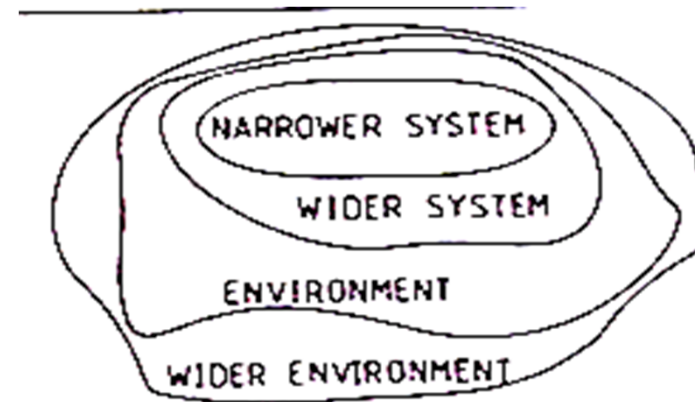
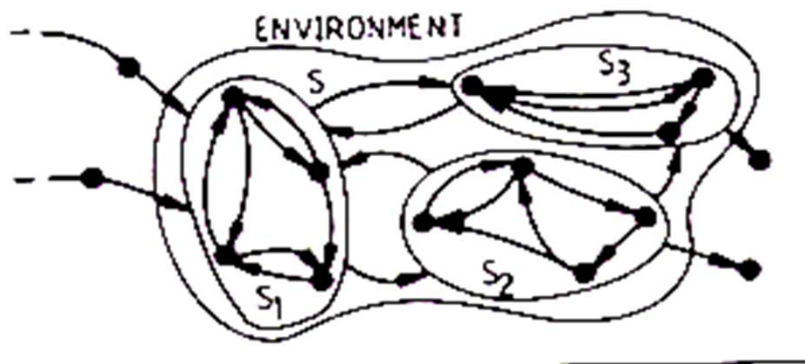
- Também existe.
- Pode ser desejável mas pode levar a mudanças estruturais e até ao colapso do sistema.

1.3. Ambiente (do sistema), sistemas fechados e sistemas abertos e homeostasia

Ambiente,

- Com o qual o sistema partilha apenas relações de **entrada / saída**.

Fronteira

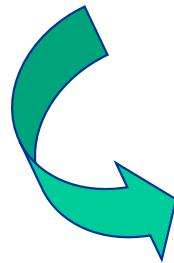
- A demarcação entre o sistema e o seu ambiente.

(De Flood and Carson)

Sistema aberto

- Troca materiais, informação e/ou energia com o ambiente através de uma fronteira (como a identificar?)
- Mantém-se a si próprio continuamente a construir e a destruir componentes (fluxos de entrada e de saída)
- Nunca se encontra, enquanto estiver vivo, num estado de equilíbrio químico ou termodinâmico, mas mantém-se num regime que se pode considerar estacionário.

Sistema fechado

- Não existe nenhuma relação entre os elementos do sistema e elementos exteriores ao sistema
- Exemplo: a química física trata das reações, das suas velocidades, e do equilíbrio químico estabelecido dentro de um reator em que se juntaram os reagentes.
- As leis da termodinâmica aplicam-se apenas a sistemas fechados.

Uma relação materializa-se através de fluxos de materiais (massas), de informação, ou de energia entre os elementos. Por isso o conceito de comunicação pode ser usado equivalentemente ao de relação.

Os três pilares da ciência moderna

Homeostasia

- O equilíbrio dinâmico entre o sistema e o seu ambiente, com fluxos que entram (influxos) e fluxos que saem (efluxos).

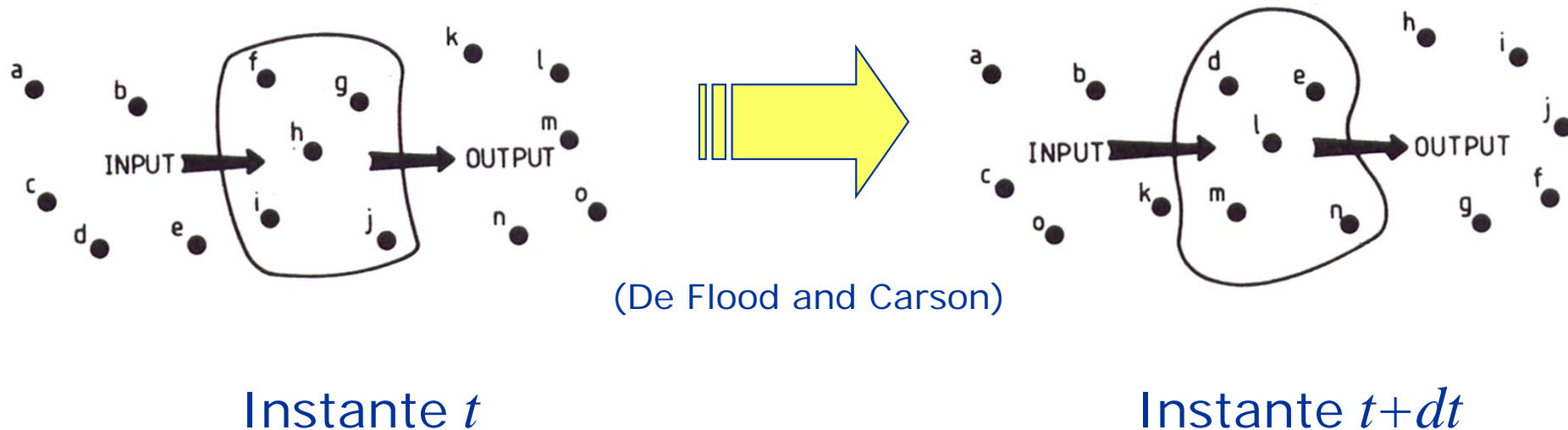
Ex. regulação térmica nos animais de sangue quente: quando o sangue arrefece o cérebro “liga” algum mecanismo de produção de calor no corpo, e a temperatura do corpo é monitorizada por retroação pelo cérebro de modo a que a temperatura do corpo se mantenha constante.

- A constância de um elevado número de variáveis físico-químicas do corpo é mantida por mecanismos de homeostase.

- A homeostase (ou homeostasia) actua para manter uma certa ordem dentro do sistema, através de mecanismos de retroacção comparáveis aos servomecanismos na mecânica e na tecnologia.

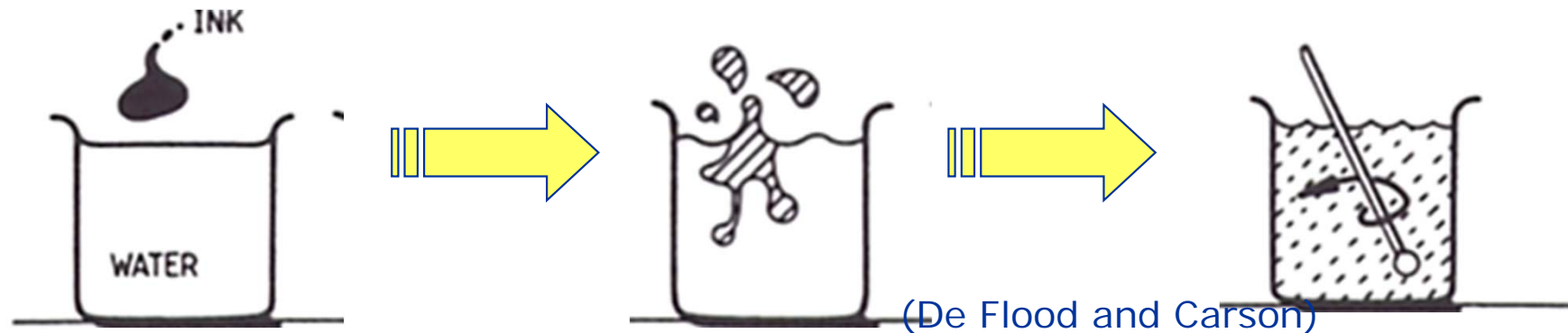
Homeostasia e regime estacionário

(De Flood and Carson)

Instante t Instante $t+dt$

As substâncias no interior da célula não são as mesmas, mas a estrutura da célula mantém-se.

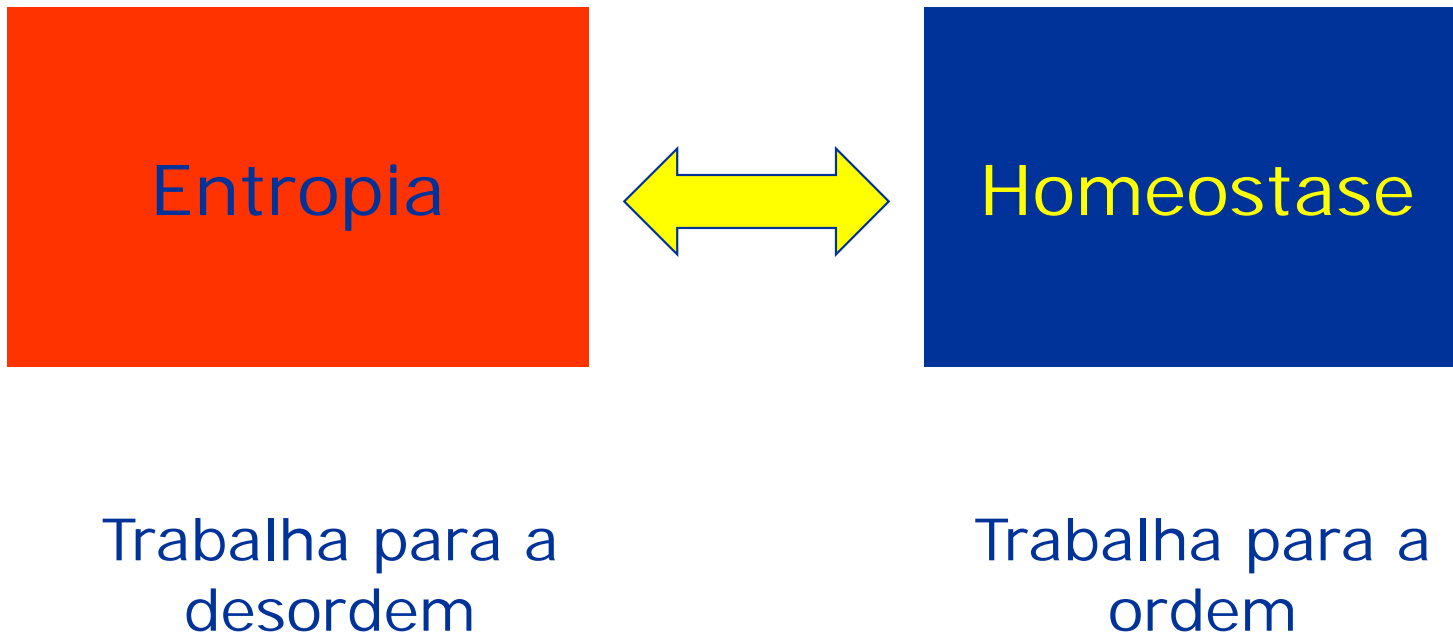
1.4 Entropia e neguentropia

- A entropia exprime a tendência que as coisas têm para evoluírem para um estado de grande desordem ou desorganização.

(De Flood and Carson)

- A entropia é um processo que carrega consigo a lei "irreversível" da degradação da energia e da matéria.

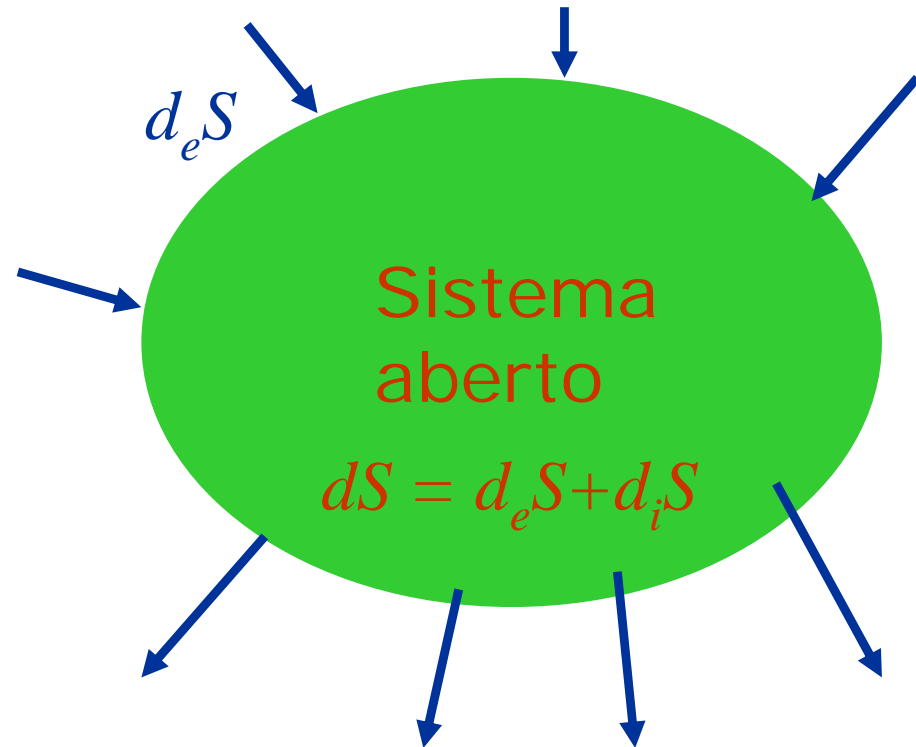
- É uma **medida da probabilidade** (dos estados: um sistema fechado tende para um estado de uma distribuição mais provável - a tendência para a desordem máxima).

Trabalha para a desordem

Trabalha para a ordem

- Um sistema aberto, como um sistema vivo, tem que importar energia, informação e materiais para compensar a tendência para uma maior desorganização.

- Um sistema aberto importa entropia negativa (negaentropia, *negentropy*).

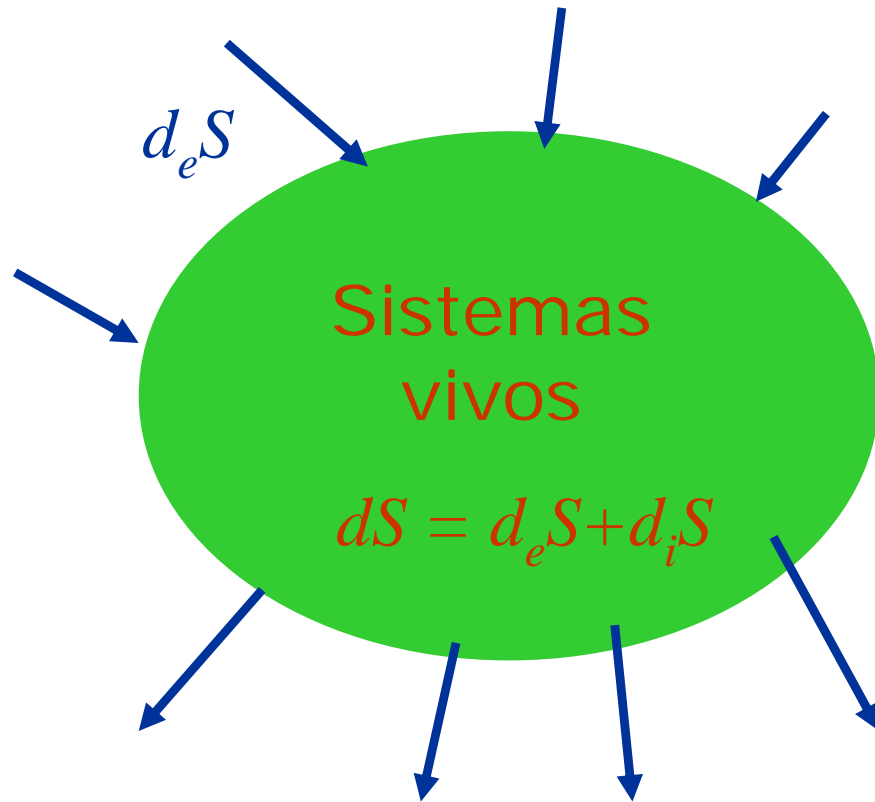
Num sistema fechado, a entropia cresce sempre, de acordo com a equação de (Rudolf Julius Emmanuel) Clausius

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Clausius.html

Num sistema aberto, pelo contrário, a variação total de entropia pode escrever-se como a equação de Ilya Prigogine

http://nobelprize.org/chemistry/laureates/1977/prigogine-autobio.html#10 http://www.fortunecity.com/emachines/e11/86/entropy.html

$$dS = d_eS + d_iS$$

Auto-organização nos sistemas vivos

-usando materiais e energia importados (actividades **negaentrópicas** ou homeostáticas)

$d_eS \leq 0$, **negaentropia** importada

$d_iS \geq 0$, degradação interna

Sistemas saudáveis:

$$|d_eS| \geq |d_iS|$$

$$d_eS + d_iS \leq 0$$

$$dS \leq 0$$

Aumenta a ordem e a organização !!!

No ambiente que rodeia o sistema aumenta a entropia (degradação ambiental)

Estrutura

- A forma como os elementos de um sistema se podem relacionar uns com os outros (topografia das relações)
- Define o contexto no qual ocorrem os fenómenos no sistema

Comportamento

- É a perceção da sua evolução decorrente de observações em instantes sucessivos t_1, t_2, ...
- O comportamento é orientado por algum objetivo que pode ser avaliado em relação a uma finalidade particular

1.5 Variáveis de estado e espaço de estados

(tamanhos de populações de espécies interdependentes, temperaturas dos corpos, volumes de água em reservatórios, etc.)

- Os atributos elementares relevantes de um sistema compõem o **vetor de estado** x

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

- O estado constitui a síntese da história do sistema: ele resulta da toda a sua evolução anterior

Trajetória de estado

- Quando o estado muda, os seus sucessivos valores descrevem uma trajetória no **espaço de estados** multidimensional.

- Um sistema é **determinístico** se os valores futuros das suas variáveis de estado podem ser univocamente determinados
- Caso contrário o sistema é **indeterminado** ou **aleatório**.

1.6 Autopoiese, adaptação , cibernética

Autopoiese

Propriedade dos sistemas que se autoproduzem.
Uma célula produz os seus próprios componentes que por sua vez a produzem a ela própria.

Os sistemas vivos podem ser considerados *autopoiéticos* na medida em que eles se organizam para que os seus processos possam produzir componentes necessários para a continuação desses próprios processos.

- **Perturbações (ambientais)** são mudanças no ambiente que podem fazer evoluir o sistema para um estado de desequilíbrio; podem ter um impacto grave no funcionamento do sistema

Adaptação

- Desenvolve-se para lidar com as mudanças ambientais e é necessária para a sobrevivência do sistema em tais circunstâncias.

- É um tipo de comportamento que visa um objectivo.

- O Darwinismo é uma teoria da adaptação.

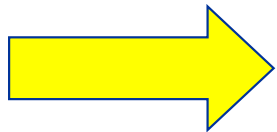
- Se o ambiente é constante, a adaptação não é uma capacidade crítica.

Sistemas adaptativos

Comportamento adaptativo a curto prazo

Para lidar com impacto agudo no sistema, este deve aplicar rapidamente regulação e controlo para reganhar equilíbrio

Comportamento adaptativo a longo prazo

Se as mudanças são crónicas, é necessário para manter a integridade do sistema

Cibernética

a ciência do controlo e comunicação nos animais e nas máquinas. Descreve as leis naturais que governam a comunicação e o controlo em situações dinâmicas.

1.7. Uma hierarquia de sistemas

Metasistema (ou supersistema)

Um sistema que se coloca por cima de outro, numa hierarquia de funções de monitorização e controlo

No humana, o cérebro (com consciência) é um metasistema

Organização hierárquica: representação lógica dos fenómenos como sistemas e subsistemas

Reducionismo sistémico

- Aumenta o **nível de resolução** de análise, vendo os sistemas em maior detalhe

- O que define o nível apropriado de resolução é o problema que está em análise, aquilo em que nos devemos focalizar (***system-in-focus)***

Emergência

As organizações hierárquicas ascendentes (cada vez mais complexas) revelam um fenómeno importante

o todo é maior do que a soma das partes

(o hino dos sistemas desde há muitos anos)

Significa que os sistemas têm **propriedades emergentes**

Diferentes estruturas apresentam diferentes emergências

Sinergia

Palavra que exprime a emergência de propriedades inesperadas e interessantes

Metáforas em sistemas

- metáfora da máquina

  descreve sistemas fechados com objectivos bem definidos que devem ser alcançados numa hierarquia rígida de controlo

- metáfora orgânica

  descreve redes complexas de elementos e de relações com transformações afetadas por retroação

- metáfora do cérebro permite emoções

- metáfora cultural

  inclui o rede de valores, crenças e normas.

- metáfora política

  permite redes de interesses interatuantes que as pessoas perseguem e podem (eventualmente) alcançar

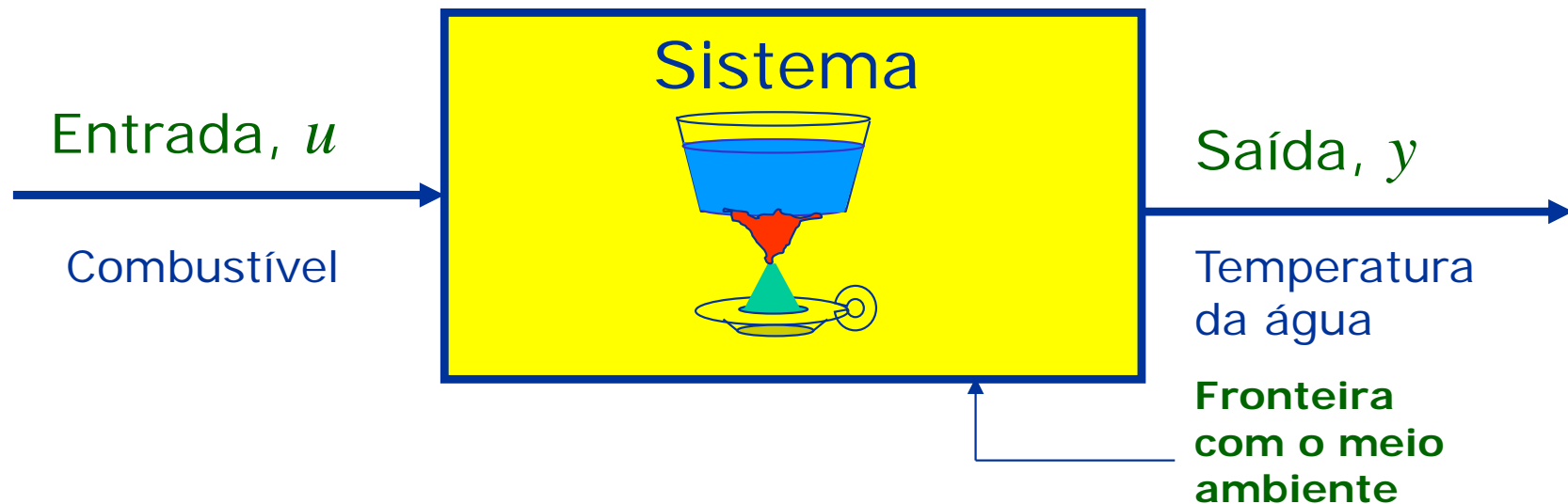
Uma hierarquia de sistemas (adaptado de Bertalanffy)

Nível	Descrição e exemplos
Sistemas simbólicos	Linguagem, lógica, matemática, ciência, morais, etc.
Sistemas sócio-culturais	Populações de organismos (incluindo humanos); comunidades humanas determinadas por símbolos (culturas).
O Homem	Simbolismo; passado e futuro, o "eu" e o mundo; auto-consciência resultando como consequência a comunicação pela linguagem.
Animais	Aumento da importância do tráfego da informação (evolução dos recetores, sistemas nervosos, etc.) aprendizagem; início da consciência.
Organismos inferiores	Organismos do tipo planta: aumento da diferenciação nos sistemas ("divisão do trabalho" nos organismos); distinção da reprodução das funcionalidades individuais.
Sistemas abertos	Chama, células, tecidos, órgãos e organismos em geral
Mecanismos de controlo	Termostato, servo-mecanismos, mecanismos homeostáticos[1] em organismos vivos

[1] homeostasia: processo de regulação pelo qual um organismo mantém o seu equilíbrio

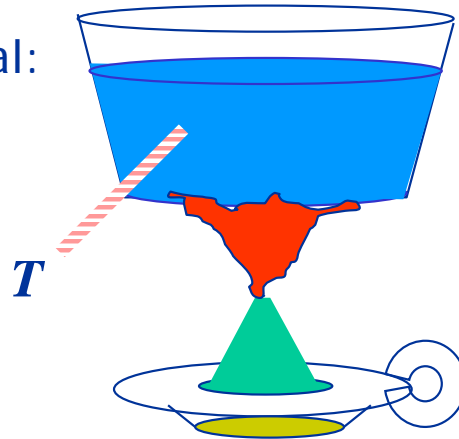
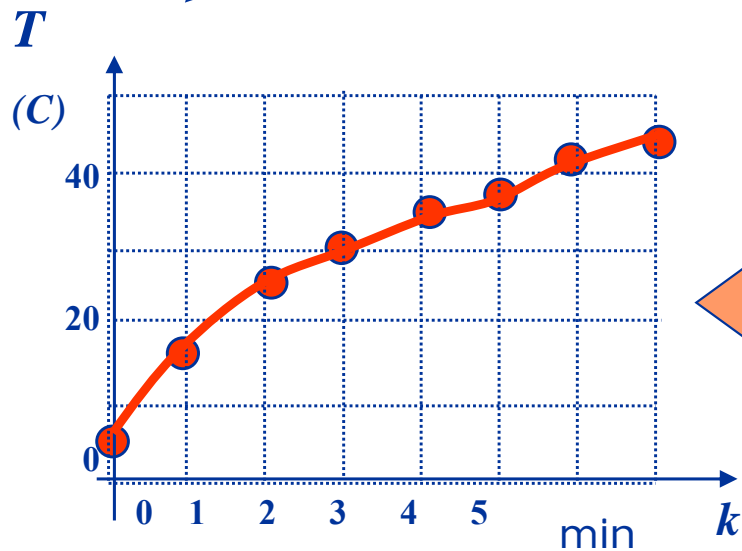
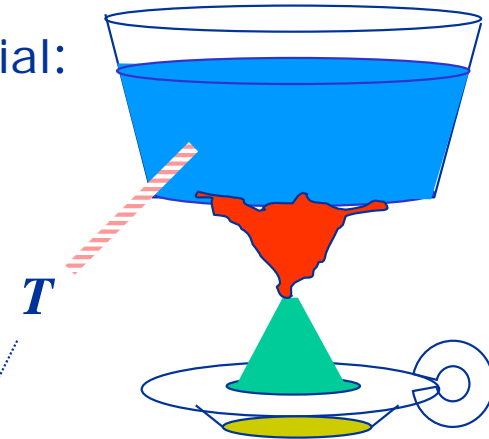
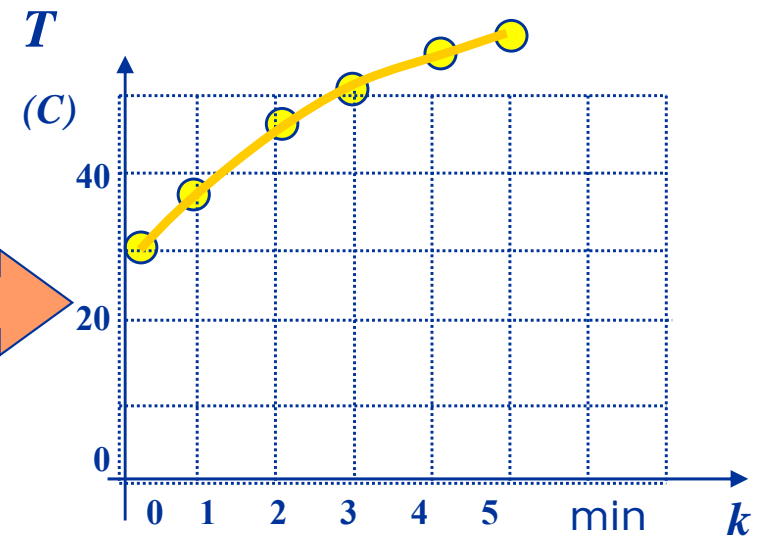
1.8 Sistemas dinâmicos: noção formal

- quanto o seu comportamento faz com que os seus atributos variem com o tempo.

Muitos sistemas são atuados do exterior, através de uma entrada, e atuam sobre o exterior através da sua saída.

A atuação pode ser através da transmissão de energia (térmica, mecânica, elétrica, ...) ou da transmissão de informação (digital, indicação de sensores, etc.).

Será que o comportamento num instante de um sistema dinâmico depende apenas da ação que se exerce sobre ele nesse instante ?

Isto é, aplicando sempre a mesma entrada, obtém-se sempre a mesma saída ?

Situação A
A mesma entrada
Situação B
Temp.inicial:
5 C (T0)
Temp.inicial:
30 C (T0)
T
T
T
(C)
40
20
0
0 1 2 3 4 5 min k
Diferentes saídas
T
(C)
40
20
0
0 1 2 3 4 5 min k

A que se deve a diferença no comportamento ?

... às condições iniciais !!!

O estado inicial reflecte tudo o que aconteceu antes de se iniciar a contagem do tempo.

Como se chegou a T_0?

Através de aquecimentos e arrefecimentos desde $-\infty$ até $t=0$

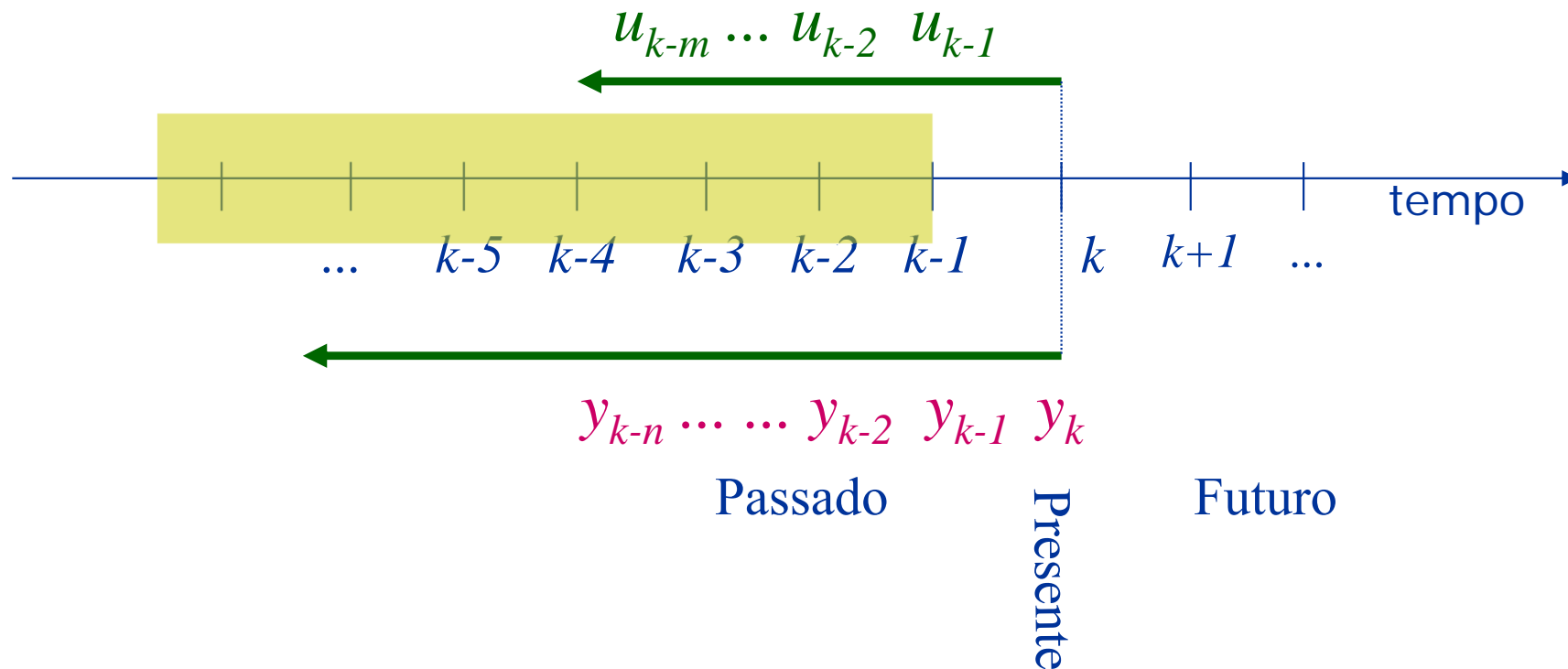
O sistema tem memória: lembra-se, através da condição inicial, do que aconteceu no passado.

A evolução futura depende do passado (através da condição inicial) e da entrada futura.

$$y_0 = f(u_{-\infty}, \ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0)$$

Quantidade infinita de informação necessária para calcular y_0...

Quantidade infinita de informação necessária ...

... aproximação por uma quantidade finita

A saída y_k é influenciada pela entrada até m instantes anteriores e pelas saídas até n instantes anteriores.

A saída y_k é influenciada por m entradas anteriores e n saídas anteriores

$$y_k = f(u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, u_{k-m}, y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_{k-n})$$

Hipótese simplificadora: f é uma função linear

$$y_k = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + b_m u_{k-m} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2}, \ldots, -a_n y_{k-n}$$

... equação linear de diferenças

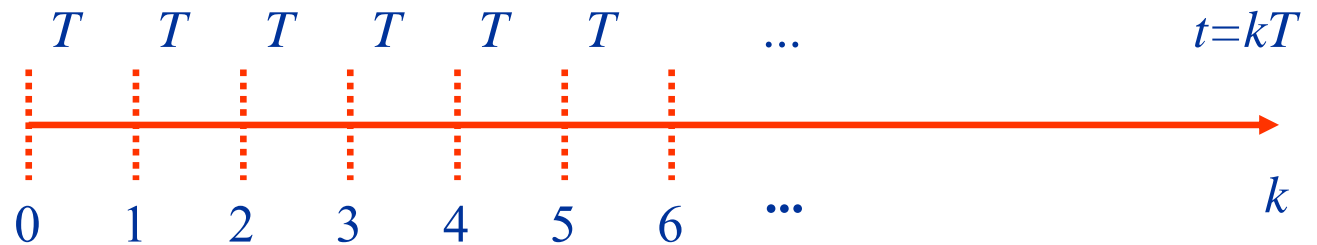
$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2), \ldots, -a_n y(k-n)$$

(notação equivalente)

Tempo discreto versus tempo contínuo

$$y_k = f(u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, u_{k-m}, y_{k-1}, y_{k-2}, ..., y_{k-n})$$

Como exprimir a memória em tempo contínuo ?

Exemplo

A discretização do eixo temporal

$$t = kT$$

$$y(k) = u(k-1) + y(k-1)$$

Equação de diferenças

$$y(k) - y(k-1) = u(k-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y(k) - y(k-1)}{1} = u(k-1)$$

$$\text{Se } T = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y(k) - y(k-1)}{T} = u(k-1)$$

Aproximação da derivada pela diferença de 1ª ordem para a frente:

$$\frac{y(k)-y(k-1)}{T}=u(k-1) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=(k-1)T}=u[(k-1)T]$$

A derivada desempenha no caso de tempo contínuo um efeito de memória que a diferença desempenha no caso discreto.

Exemplo: Veículo espacial

Força

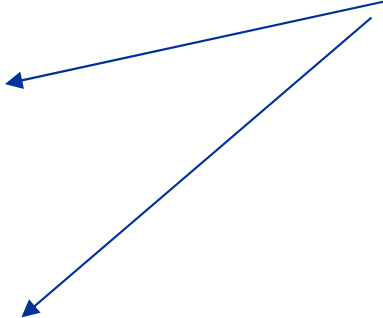
u

Lei de Newton:

força = massa x aceleração

(Sem atrito, simplificando)

y

$$u(t) = ma(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$u(t) = ma(t) = m\ddot{y}(t)$$

Qual é a memória do sistema ?

$$u(t) = ma(t) = m\ddot{y}(t)$$

$$\frac{dy(kT)}{dt} = \dot{y} = \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T}$$

Aproximação da derivada pela diferença de 1ª ordem para a frente

$$\frac{d^2y(kT)}{dt^2} = \ddot{y} = \frac{\dot{y}((k+1)T) - \dot{y}(kT)}{T} =$$

$$= \frac{\dfrac{y((k+2)T) - y((k+1))T}{T} - \dfrac{y((k+1)T) - y(kT)}{T}}{T} =$$

$$= \frac{y((k+2)T) - 2y((k+1)T + y(kT)}{T^2}$$

$$m\ddot{y}(t) = u(t) \qquad \ddot{y}(t) = \frac{u(t)}{m}$$

$$\frac{y((k+2)T) - 2y((k+1)T + y(kT)}{T^2} = \frac{u(kT)}{m}$$

$$y((k+2)T) - 2y((k+1)T + y(kT) = \frac{T^2}{m}u(kT)$$

$$y(k+2) = \frac{T^2}{m}u(k) + 2y(k+1) - y(k))$$

ou

$$y(k) = \frac{T^2}{m}u(k-2) + 2y(k-1) - y(k-2)$$

Qual é a memória do sistema ?

1.9 Conclusão

- A noção de sistema permite exprimir pelo mesmo formalismo muito fenómenos de natureza e complexidade diversas.

- Os sistemas têm em geral memória, que influencia a sua dinâmica (capacidade de evoluir).

- A memória pode-se exprimir por diferenças temporais (tempo discreto) ou por derivadas e integrais (tempo contínuo).

Bibliografia

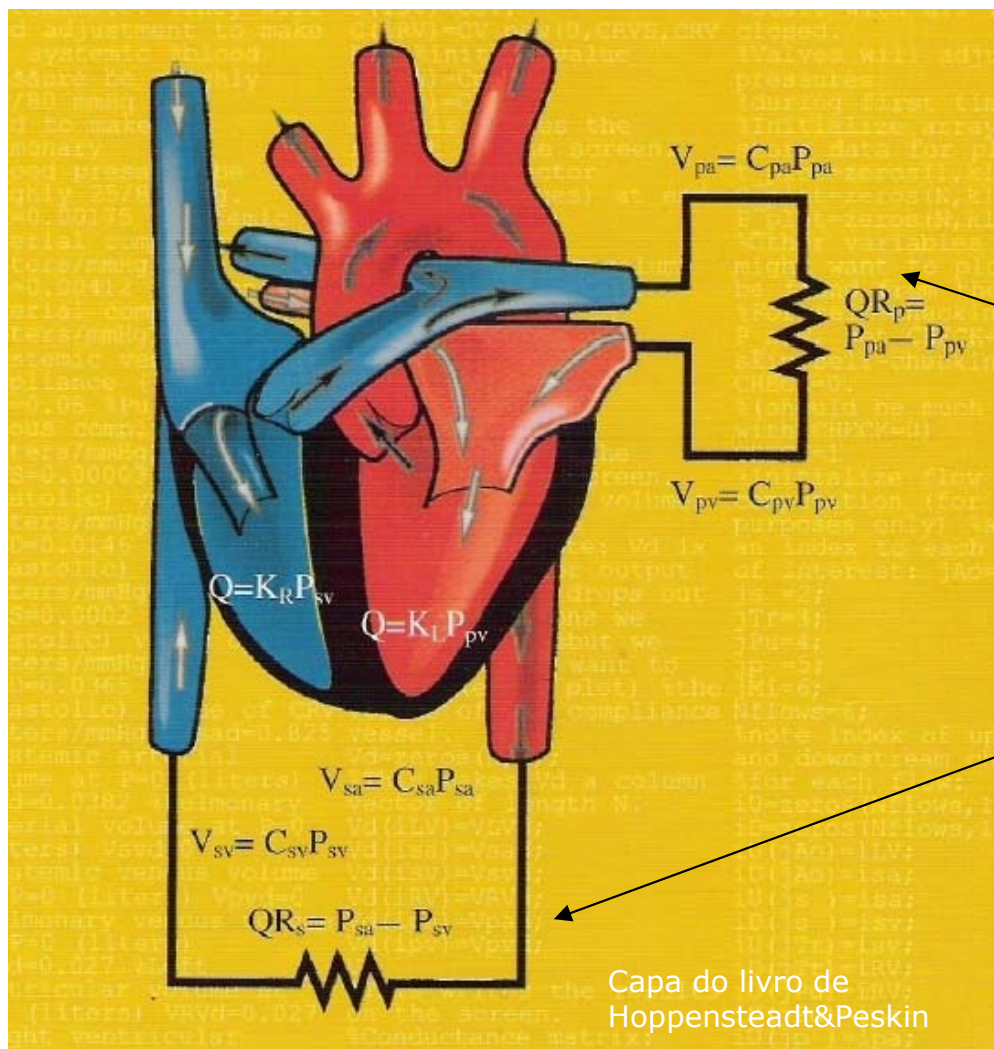
- Flood, R. and E.R. Carson, Dealing with Complexity, An Introduction to the Theory and Applications of Systems Science, Plenum Press, 1993.

- Bertalanffy, L., General Systems Theory, George Brazillier, NY, 1969.

- Boyd, D.W. Systems Analysis and Modelling, A Macro-to-Micro Approach with Multidisciplinary Applications, Academic Press, 2001.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Clausius.html

https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1977/prigogine/facts/

Capítulo 2

Modelização de sistemas por equações diferenciais

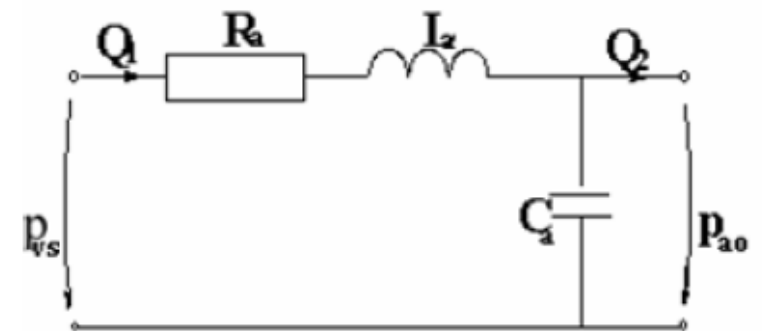
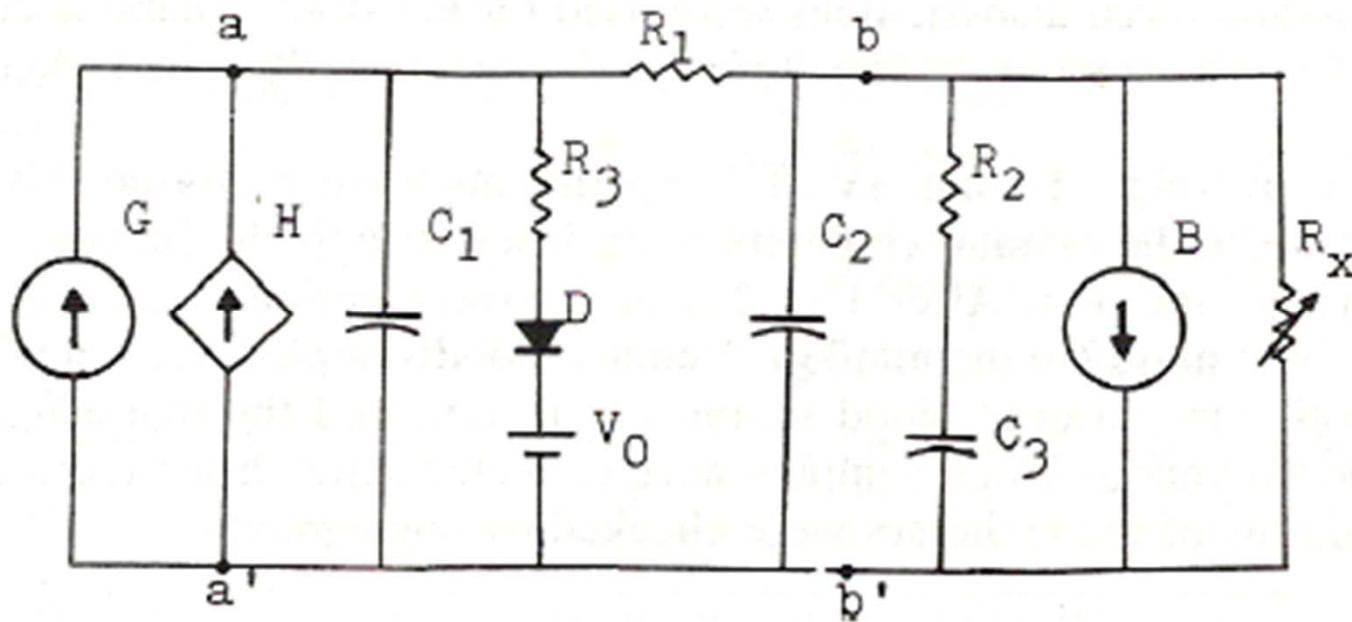



Fig. 5. Equivalent circuit for an aortic segment.

https://snet.elth.pub.ro/snet2004/Cd/circ/circ_P16.pdf 5/08/2022

(Witten (Ed), *An electrical equivalent circuit model of glucose-insulin kinetics during intravenous glucose tolerance tests in dogs and in man*, p. 1188))

Modeling and Characterization of a Valved Glaucoma Drainage Device With Implications for Enhanced Therapeutic Efficacy

Tingrui Pan*, Matthew S. Stay, Victor H. Barocas, J. David Brown, and Babak Ziaie

IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING, VOL. 52, NO. 5, MAY 2005

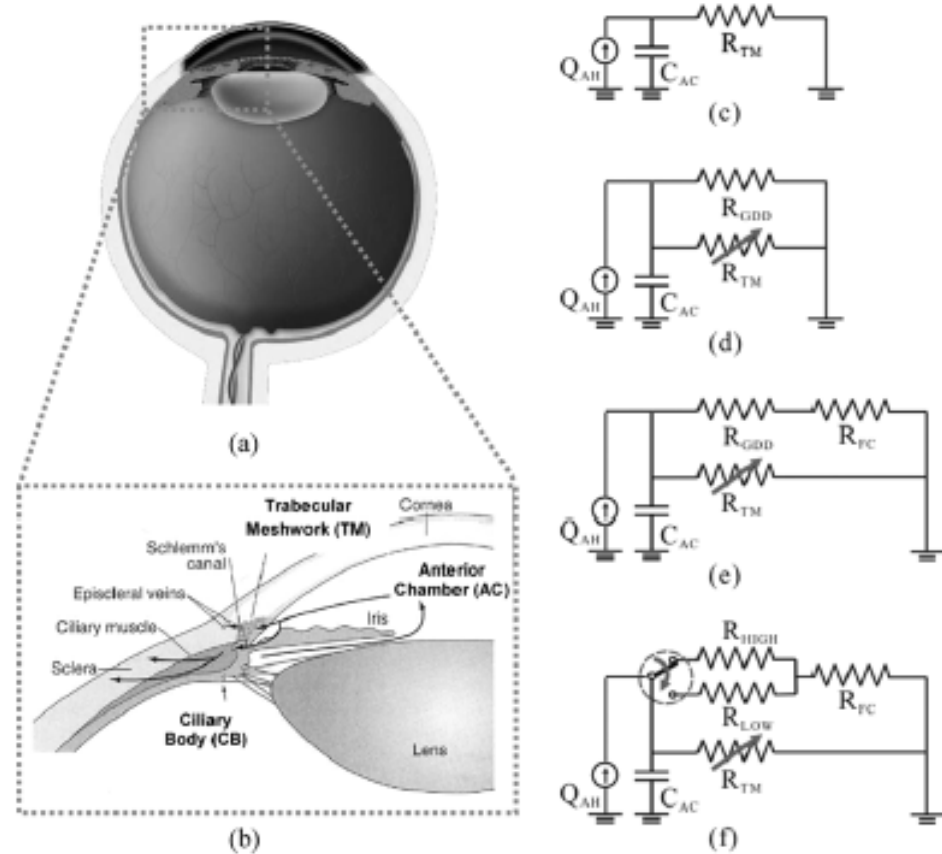



Fig. 1. (a) A cross-sectional view of a human eyeball with (b) a close-up view of the aqueous humor outflow pathway and circuit diagram representations of (c) normal aqueous humor outflow pathway, (d) GDD pathway, (e) an implanted GDD after fibrous capsule formation and, (f) a simple concept of bypassing the GDD.

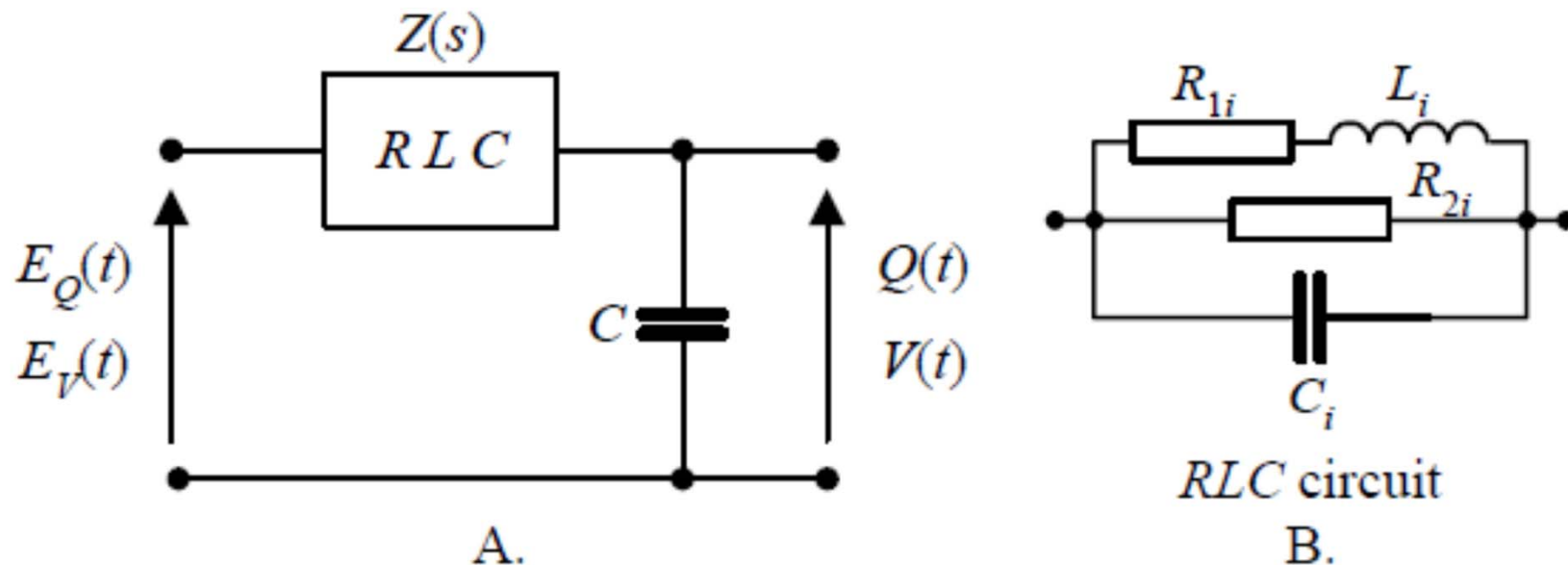
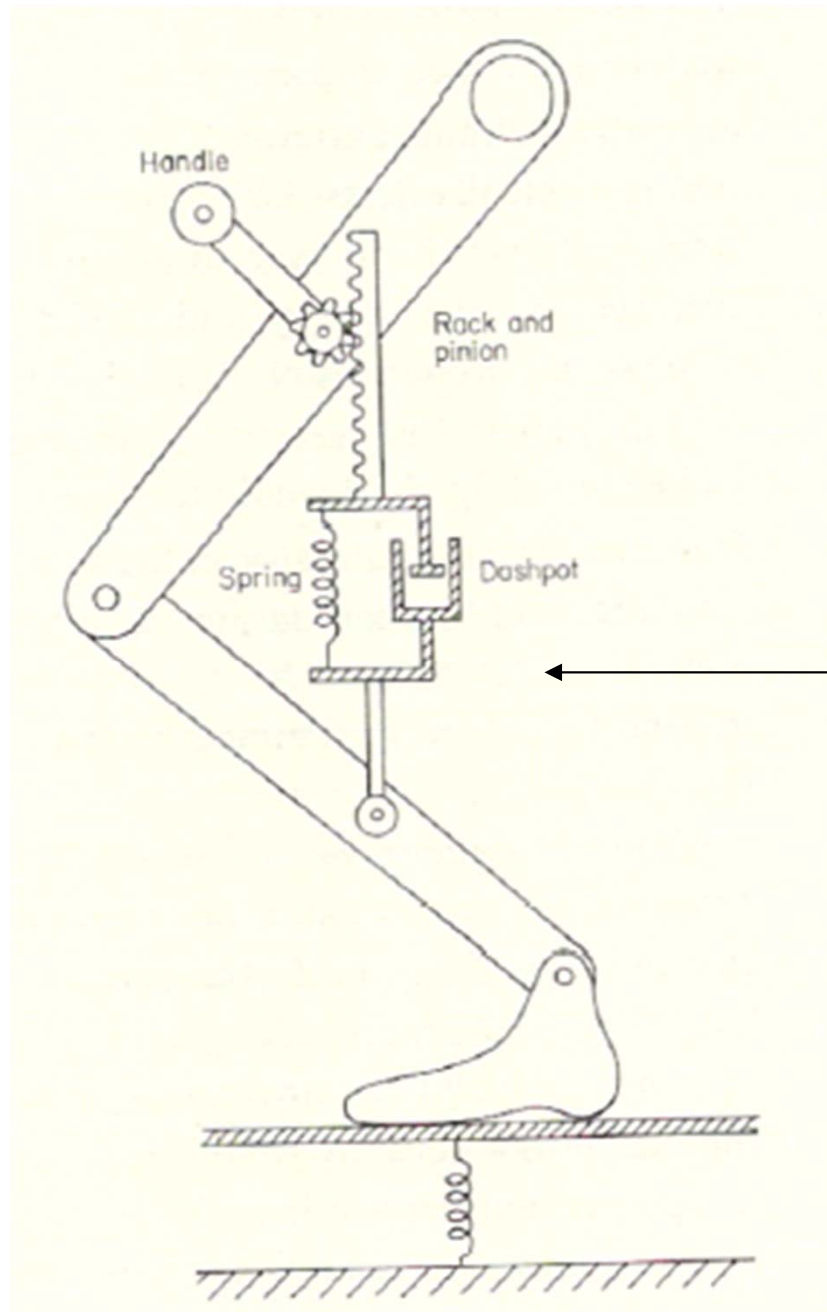
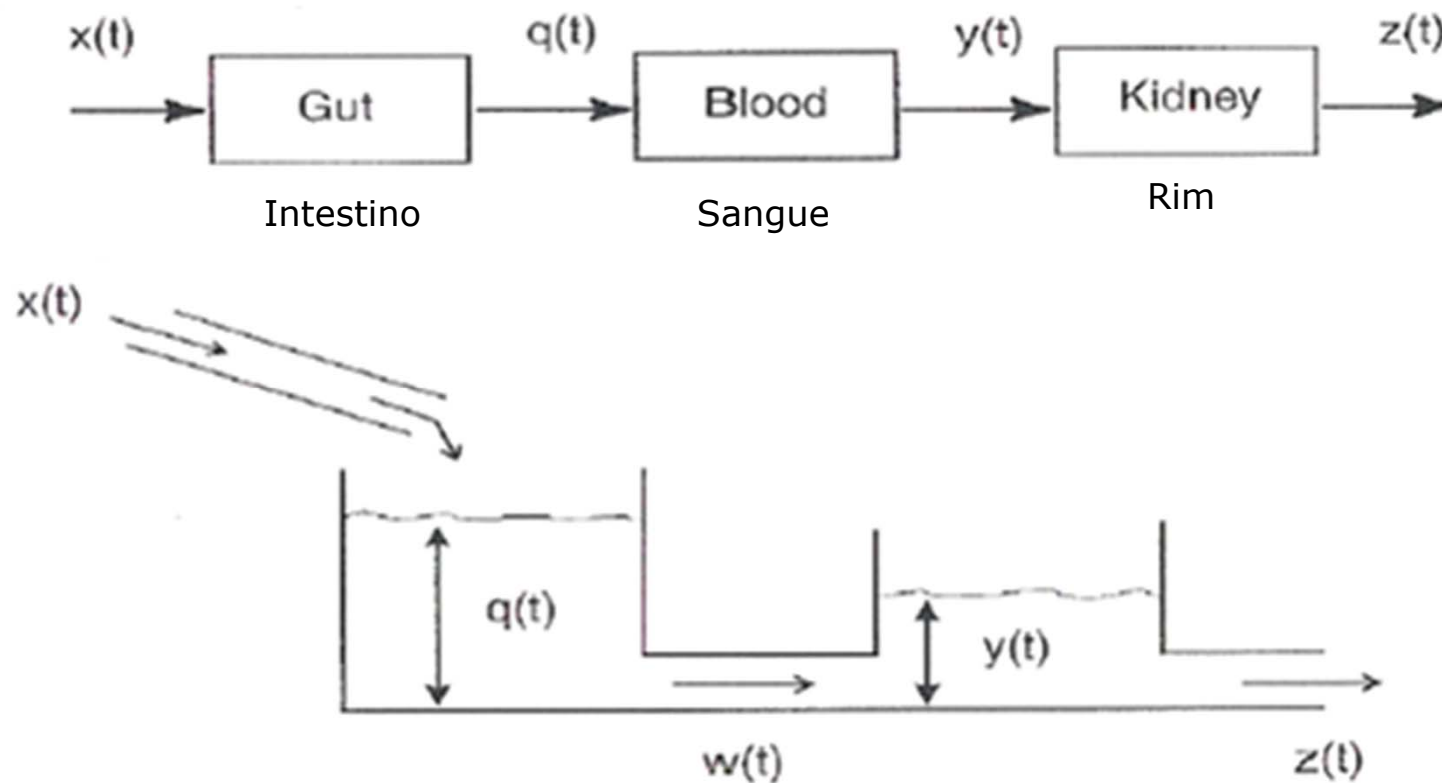



Fig. 2. A - The electrical model of the respiratory system. Remarks: $E_Q(t)$ i $E_V(t)$ – unknown excitation, generating flow and volume curves $Q(t)$ and $V(t)$ respectively; B - Elementary section *RLC* used during the respiratory system synthesis

Sistema elétrico análogo do sistema respiratório

(B. Juroszek, J. Stanisławski, Synthesis of the Structure of the Respiratory System in Forced Expiration, MEASUREMENT SCIENCE REVIEW, Volume 3, Section 2, 2003).

Sistema mecânico
análogo

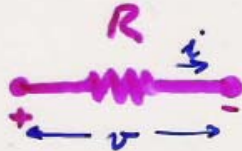
Modelo de uma perna (McMahon)

Sistema fluídico análogo à absorção e excreção de um fármaco pelo corpo humano (de Bruce *Biomedical Signal Processing and Signal Modelling*, John Wiley and Sons, 2001).

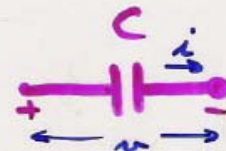
2.1 Sistemas elétricos

2.2 Sistemas mecânicos

2.3 Sistemas térmicos

2.4 Sistemas fluídicos

2.5 Sistemas químicos

2.6 Sistemas biológicos

2.7 Sistemas fisiológicos

2.8 Simulação de equações diferencias e de diferenças

2.1 Sistemas elétricos

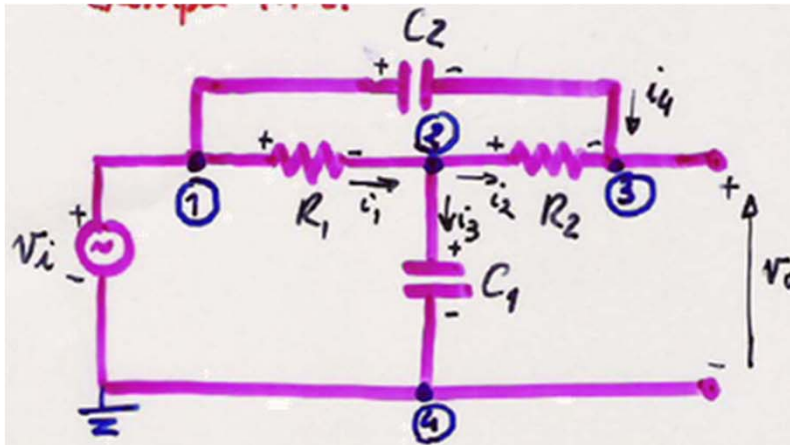
Exemplo 1

Uma equação diferencial de 2ª ordem

Duas equações diferenciais de 1ª ordem

$$x_1 = \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \ddot{y} = -\frac{R}{L}\dot{y} - \frac{1}{LC}y + \frac{1}{LC}u = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{LC}u$$

$$x_2 = y \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{y} = x_1$$

Exemplo 2

Técnica dos nós

i) - selecciona-se um nó de referência (a massa, em geral)

ii) - as tensões nos outros nós escolhem-se como incógnitas

iii) - escreve-se uma equação de Kirchoff (de corrente) para cada nó

iv) - exprimem-se as correntes em função das incógnitas e dos parâmetros do circuito

i) ④ é o nó de referência

ii) As incógnitas serão v_2 e v_3 ($v_1 = v_i$, a entrada)

iii) Equação no nó ②

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Equação no nó ③

$$i_2 + i_4 = 0$$

Note-se que o número de equações de nó deve ser igual ao número de incógnitas.

Exemplo 2

(iv) $$\frac{v_i - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \frac{dv_2}{dt}$$

$$\frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_2 \frac{d(v_i - v_3)}{dt} = 0$$

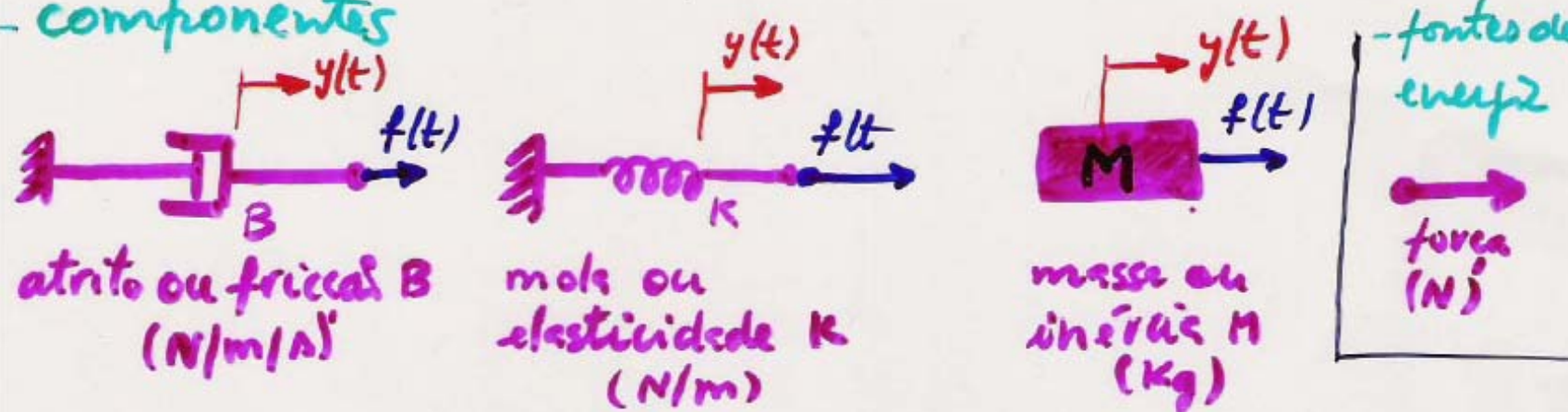
duas equações diferenciais de 1.ª ordem, lineares de coeficientes constantes

Escrevendo-as em função de $v_{C_1} \triangleq v_2$ e de $v_{C_2} \triangleq v_i - v_3$,

(agora $v_3 = v_i - v_{C_2}$)

$$\begin{cases} \dfrac{v_i - v_{C_1}}{R_1} = \dfrac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R} + C_1 \dfrac{dv_{C_1}}{dt} \\[2ex] \dfrac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R_2} + C_2 \dfrac{d(v_i - v_i + v_{C_2})}{dt} = 0 \end{cases}$$

Exemplo 2

$$\dot{v}_{C_1} = -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{C_1} - \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)v_{C_2} + \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_i$$

$$\dot{v}_{C_2} = -\frac{1}{C_2 R_2}v_{C_1} - \frac{1}{C_2 R_2}v_{C_2} + \frac{1}{C_2 R_2}v_i$$

Duas equações diferenciais de 1ª ordem

2.2.1 Sistemas mecânicos de translacção (movimento retilíneo)

2.2.1 Sistemas mecânicos de translação (movimento retilíneo)

- armazenadores de energia

mola : $e = \frac{1}{2} K y^2$ (potencial)

massa : $e = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M (\dot{y})^2$ (cinética)

Joules ou N-m

- dissipador de energia

atrito : $W = B v^2 = B(\dot{y})^2$ (N-m/s ou Watts)

(potência) $e = \int W \cdot dt$

- princípio fundamental para a análise

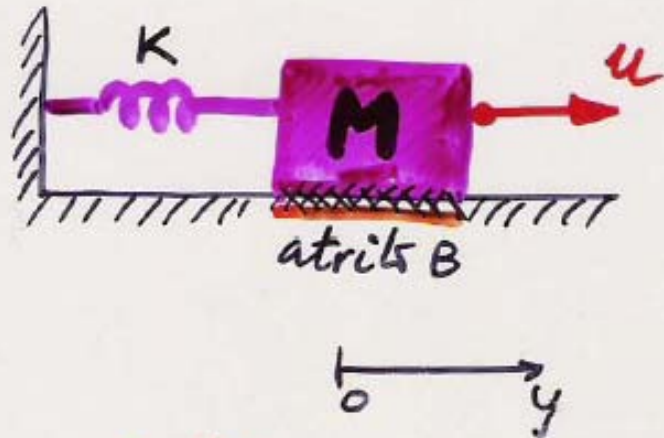
lei de Newton (eq. de movimento)

$$F = M \cdot a$$

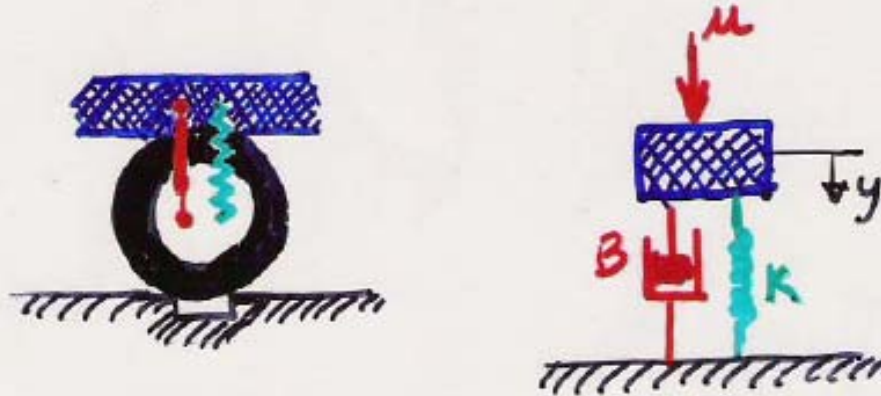
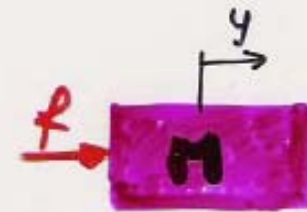
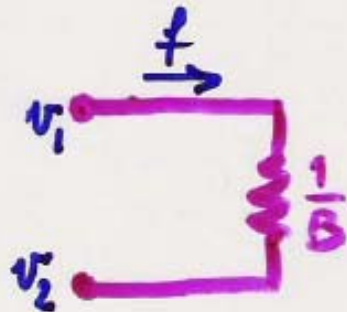
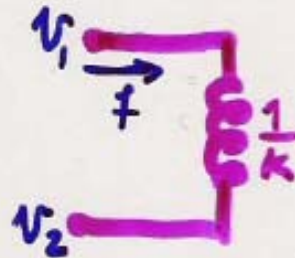
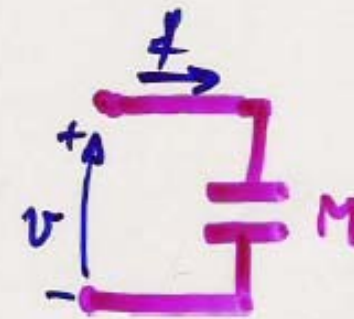
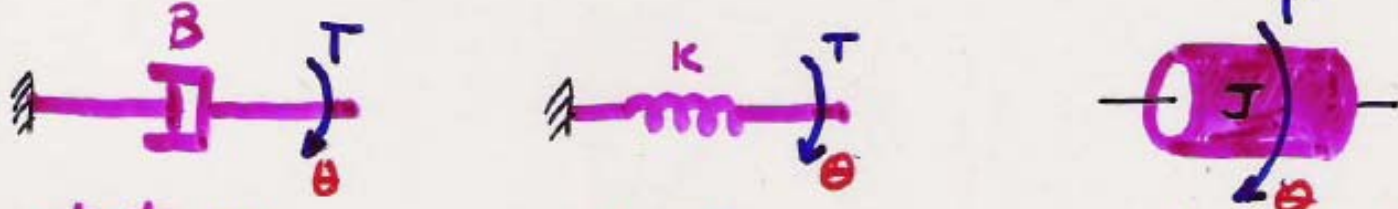
- F: soma de todas as forças aplicadas ao corpo de massa M (N)
- M: massa do corpo (Kg)
- a: aceleração a que o corpo é submetido (m/s²)

Exemplo 1

Massa M
u
atrito B
0
y
referencial
atrito
M
u
M ÿ + B ẏ = u
Quais as forças aplicadas à massa M?
• u, aplicada do exterior
• o atrito opõe-se ao movimento, ou seja, aplica uma força de sinal contrário ao de u
$f_a = B\dot{y}$
Lei de Newton
$u - B\dot{y} = M\ddot{y}$
Soma das forças aplicadas a **M**

Exemplo 2

Quais as forças aplicadas a M?
• u, aplicada do exterior
• o atrito, fa = Bẏ
• a que exerce a mola sob tensão, f mola = Ky
K
M
u
atrito B
o
y
Ky
Bẏ
B
lei de Newton
u - Ky - Bẏ = Mÿ
Mÿ + Bẏ + Ky = u
Soma das forças aplicadas a M

Exemplo 3

Suspensão de um automóvel:
u
y
B
K
M ≙ massa do automóvel
u ≙ força vertical aplicada ao veículo (por acção da gravidade) quando aparece um buraco.
$M\ddot{y}+B\dot{y}+Ky=u$
$\ddot{y}+\frac{B}{M}\dot{y}+\frac{K}{M}y=\frac{u}{M}$
(semelhante ao exemplo 2.)
(eq. dif. linear, 2.ª ordem, coef. const.)

f
y1
y2
B
f
y1
y2
K
f
y
M
f = B(ẏ1 - ẏ2)
f = K(y1 - y2)
f = M·ÿ
y ≙ posição ; ẏ ≙ velocidade v ; ÿ ≙ aceleração a ;
a = v̇
f = B(v1 - v2)
ḟ = K(ẏ1 - ẏ2)
= K(v1 - v2)
f = M v̇
f
v1
v2
1/B
v1
f
1/K
v2
f
+
v
-
M
f = (v1 - v2)/(1/B) = B(v1 - v2)
v1 - v2 = 1/K df/dt = 1/K ḟ
ḟ = K (v1 - v2)
f = M dv/dt = M v̇

Analogias elétrico-mecânico

mecânico		eléctrico	
atrito	B	condutância	$G = 1/R$
massa	M	capacidade	C
mola	K	indutância^{-1}	$1/L$
força	f	corrente	i
velocidade	v	tensão	v

Quadro de analogias mecânico ↔ eléctrico
translac.

2.2.2 Sistemas mecânicos de rotação (movimento angular)

2.2.2 Sistemas mecânicos de rotação (movimento angular)

- parâmetros: B, K, J
- armazenadores de energia:

  torção: $e = \frac{1}{2} K \theta^2$ (potencial)

  inércia: $e = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J (\dot{\theta})^2$ (cinética).

  (Joule ou N-m)
- dissipador de energia:

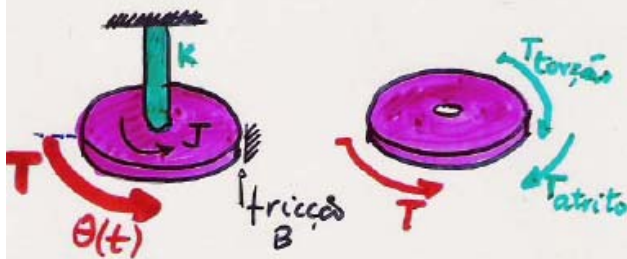
  fricção rotativa: $W = B \omega^2 = B (\dot{\theta})^2$ (N-m/s ou Watt)

  (W: potência)

  $e = \int W . dt$
- princípio fundamental de análise

  lei de Newton

$$T = J . \alpha$$

- T: soma de todos os binários aplicados (em relação ao eixo fixo do corpo).
- J: momento de inércia do corpo
- α: aceleração angular

K ≙ coeficiente de torção do eixo

B ≙ fricção entre o disco e a superfície exterior

T ≙ binário exterior aplicado

J ≙ momento de inércia em relação ao eixo.

Quais são os binários aplicados ao disco?

- binário exterior $T(t)$
- binário resultante da torção do eixo, $T_{torção} = K\,\theta(t)$
- binário devido ao atrito B, $T_{atrito} = B\,\dot{\theta}(t) = B\,\omega(t)$

Lei de Newton aplicada ao disco

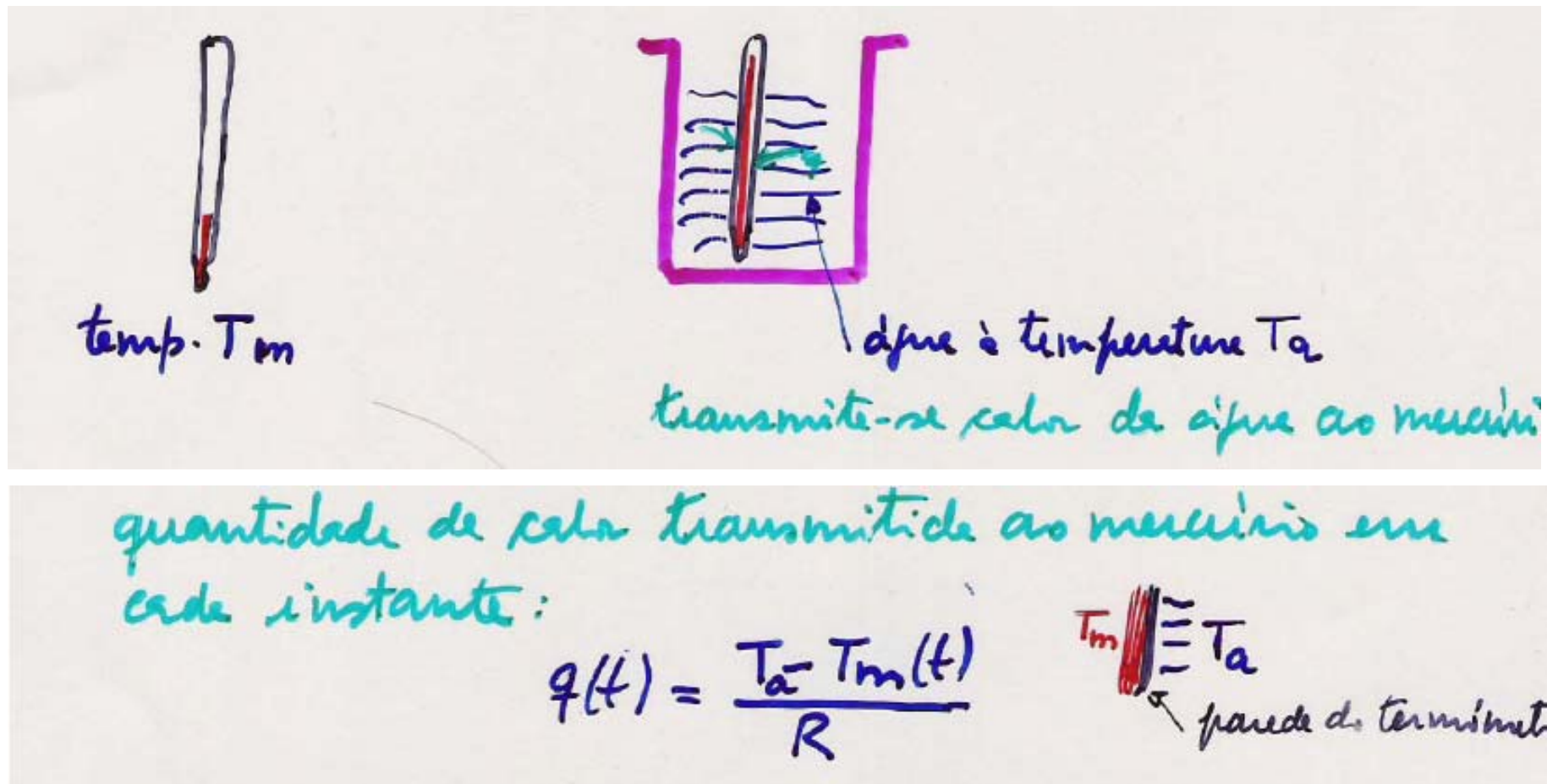
$$T - T_{torção} - T_{atrito} = J\,\ddot{\theta}$$

$$T - K\theta - B\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \Rightarrow J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = T$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{J}\dot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = \frac{T}{J}$$, eq. dif. 2.ª ordem, linear invariante

2.3 Sistemas térmicos

Os sistemas térmicos transmitem e armazenam energia térmica (quantidade de calor)

Exemplo: termómetro de mercúrio

Exemplo: termómetro de mercúrio

incremento da temperatura do mercúrio

$T_m(0) \triangleq$ temperatura inicial do mercúrio

$T_m(t) - T_m(0) \triangleq$ incremento da temperatura

$C \triangleq$ capacidade térmica do mercúrio (total)

$C \cdot T_m(t) \triangleq$ quantidade de calor contida no mercúrio

$C.(T_m(t) - T_m(0)) \triangleq$ quantidade de calor absorvida pelo mercúrio desde 0 até t

Exemplo: termómetro de mercúrio

balanço de energia

$$q(t)\cdot\Delta t = \Delta[C\cdot T_m(t)] = C\cdot\Delta T_m(t)$$

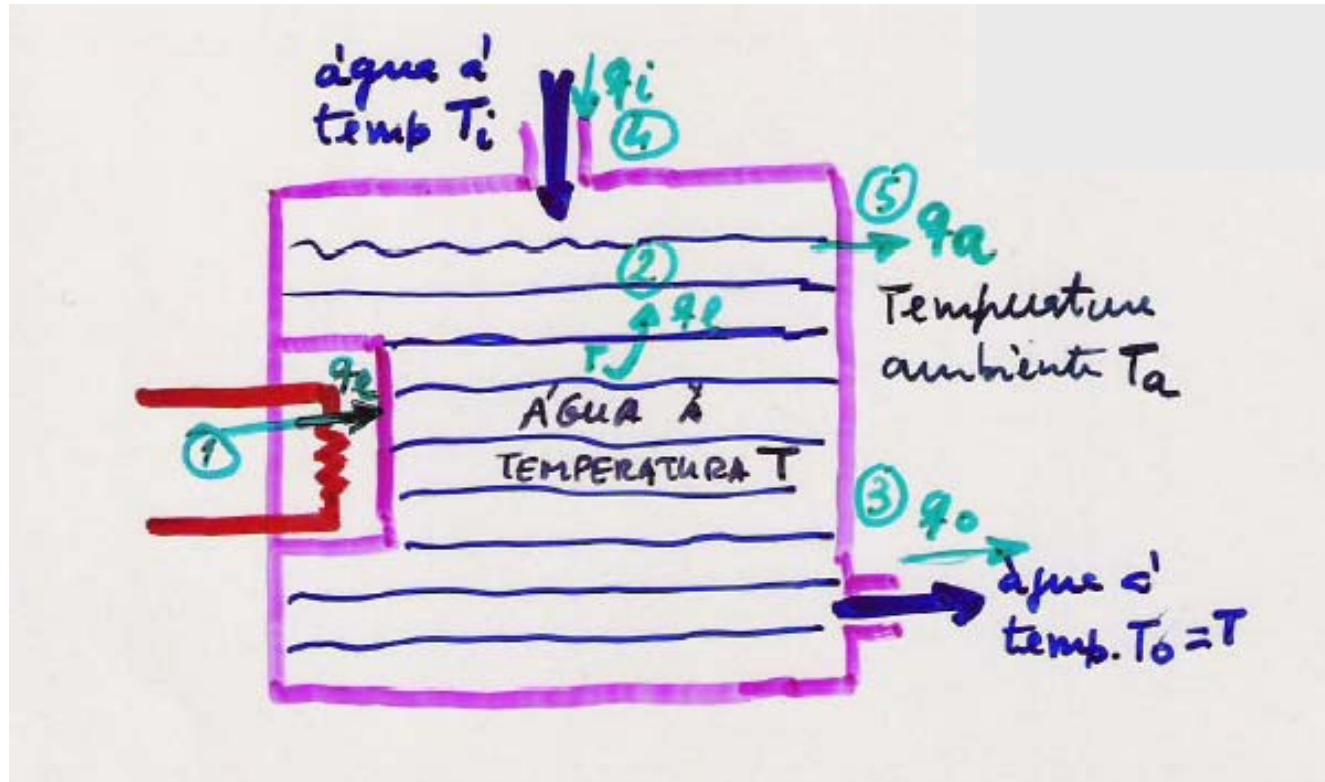
$q(t)\cdot\Delta t$: quantidade de calor fornecida através da parede

$\Delta[C\cdot T_m(t)]$: incremento da quantidade de calor contido no mercúrio

$$\frac{T_a - T_m}{R} = C\,\frac{\Delta T_m}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} RC\,\dot{T}_m + T_m = T_a$$

$$\dot{T}_m + \frac{1}{RC}T_m = \frac{1}{RC}T_a$$

Uma equação diferencial de 1ª ordem

Exemplo: cilindro doméstico

Exemplo: cilindro doméstico

① $q_e \triangleq$ quantidade de calor fornecido pela resistência eléctrica

② $q_\ell \triangleq$ quantidade de calor absorvido pela água no cilindro

③ $q_o \triangleq$ quantidade de calor que sai do cilindro (na água)

④ $q_i \triangleq$ quantidade de calor que entra no cilindro (na água)

⑤ $q_a \triangleq$ quantidade de calor que passa (pela parede) para fora.

PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\underbrace{q_e + q_i}_{\text{calor que entra}} = \underbrace{q_\ell}_{\text{calor que fica}} + \underbrace{q_o + q_a}_{\text{calor que sai}}$$

Exemplo: cilindro doméstico

- q_e : fornecido pela resistência eléctrica

em cada instante,

$$q_e = R i^2 \triangleq u$$

- q_ℓ : absorvido pela água no cilindro

durante um intervalo de tempo Δt

$$q_\ell \cdot \Delta t = M \cdot c \cdot \Delta T$$

M: massa de água; c: calor específico da água; ΔT: variação de temp. da água

$$q_\ell = M \cdot c \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} \xrightarrow{\lim \Delta t \to 0} q_\ell = Mc \frac{dT}{dt}$$

Exemplo: cilindro doméstico

- q_i : fornecido na água que entra com caudal V(kg/s) à temperatura T_i

$$q_i = V . c . T_i$$

- q_o : sai, com a água, do cilindro

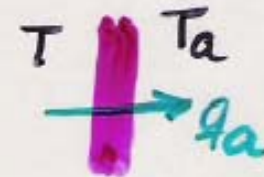
$$q_o = V . c . T$$

(admitindo que o caudal de saída é igual ao de entrada)

- q_a : perde-se para o ambiente através da parede

R ≙ resistência térmica da parede

T | T_a → q_a

$$q_a = \frac{T - T_a}{R}$$

Exemplo: cilindro doméstico

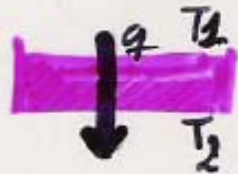
substituindo na equação do balanço de energia

$$u + V.c.T_i = M.c.\frac{dT}{dt} + V.c.T + \frac{T - T_a}{R}$$

$$\dot{T} + \left(\frac{1}{RMc} + \frac{V}{M}\right)T = \frac{1}{Mc}u + \frac{V}{M}T_i + \frac{V}{R.M.c}T_a$$

Uma equação diferencial de 1ª ordem

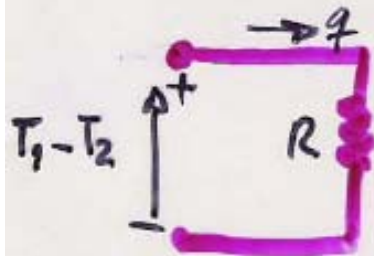
Analogia elétrico-térmico

- elemento dissipador

q, T_1, T_2

A: área
h: coef. trans. de calor

Resistência Térmica

$$q = hA(T_1 - T_2)$$

$$q = \frac{1}{R}(T_1 - T_2)$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

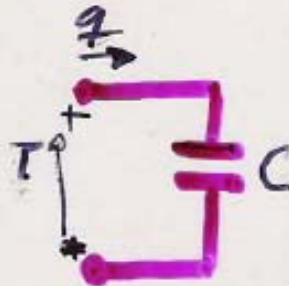
- elemento armazenador de energia

q, T

V: volume ; ρ: densidade
c: calor específico

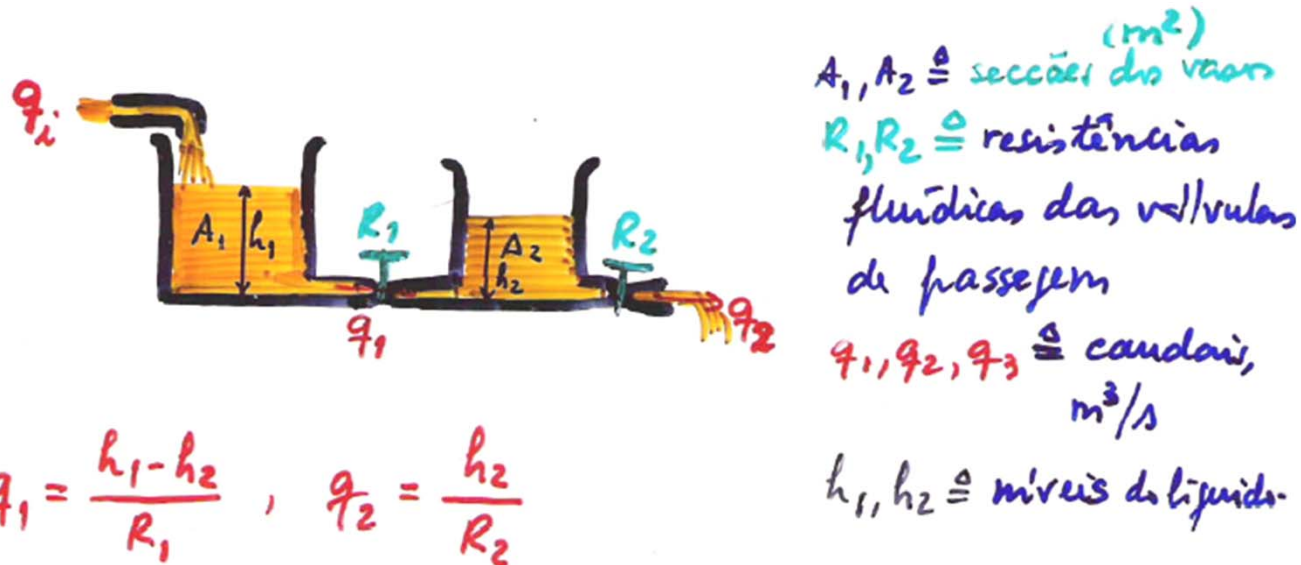
capacitância térmica

$$q = (\rho V c)\dot{T} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

$$q = C \cdot \frac{dT}{dt}$$

$$q = C \frac{dT}{dt}$$

Analogia elétrico-térmico

2.4 Sistemas fluídicos

Nos sistemas fluídicos circulam fluidos, ou seja líquidos os gases. Neste curso interessam-nos os líquidos.

Ver os apontamentos, págs 46-48.

Sistemas análogos: sistemas de natureza energética diferente (neste caso elétrica e térmica) mas com a mesma estrutura (componentes que têm funções análogas e sinais análogos). As suas equações diferenciais têm a mesma forma.

Dois sinais são análogos se, embora de natureza diferente (corrente e calor, por exemplo), têm a mesma evolução temporal quando os sistemas têm a entrada com a mesma forma no respetivo tipo de energia.

Dois componentes são análogos se exercem sobre os respetivos sinais de entrada o mesmo efeito.

TABELA DE ANALOGIAS

	ELÉCTRICOS	MECÂ. TRANSL	MECÂ. ROTAC	FLUÍDICOS	TÉRMICOS
DISSIPADOR DE ENERGIA	R (Ω) $Ri^2 = \frac{v^2}{R}$	B^{-1} Bv^2	B^{-1} Bv^2	R	R
ARMAZENA. DE ENERGIA	L Henry cinética $\frac{1}{2}Li^2$	K^{-1} potencial $\frac{1}{2}Ky^2$	K^{-1} $\frac{1}{2}K\theta^2$		
	C farad potencial $\frac{1}{2}Cv^2$	M cinética $\frac{1}{2}Mv^2$	J $\frac{1}{2}J\omega^2$	h potencial $\frac{1}{2}Ch^2$	C potencial $\frac{1}{2}CT^2$
VARIÁVEL CIRCULANTE	i amperes	f	T (binário)	q	q
VARIÁVEL DIFERENCIAL	v volts	v	ω	h	T (Temperatura)

2.5 Sistemas químicos

- **Envolve os princípios básicos de termodinâmica, cinética, fenómenos de transporte, etc.**
- **Um sistema químico recebe materiais e energia do exterior, fornece materiais e energia ao exterior e dentro dele acontecem reações químicas.**
- **Aplica-se o princípio geral de conservação de massa e de energia (nada se perde, tudo se transforma).**
- **Genericamente, o princípio de conservação do componente S do sistema é dada pela equação de balanço.**

$$\frac{\begin{bmatrix}\text{acumulação de S}\\ \text{dentro do sistema}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\text{intervalo}\\ \text{de tempo}\end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\ \text{dentro do sistema}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\text{intervalo}\\ \text{de tempo}\end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\ \text{fora do sistema}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\text{intervalo}\\ \text{de tempo}\end{bmatrix}} + \frac{\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\ \text{gerada no sistema}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\text{intervalo}\\ \text{de tempo}\end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\ \text{consumida no sistema}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\text{intervalo}\\ \text{de tempo}\end{bmatrix}}$$

S pode ser a massa total, a massa de um componente individual, a energia total.

Assim, para um sistema químico genérico, poderemos escrever

Balanço mássico total:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \sum_{i:entradas} \rho_i F_i - \sum_{j:saídas} \rho_j F_j$$

Balanço mássico para o componente A:

$$\frac{d(n_A)}{dt} = \frac{d(C_A V)}{dt} = \sum_{i:entradas} c_{A_i} F_i - \sum_{j:saídas} c_{A_j} F_j \pm rV$$

Balanço energético total:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(U+K+P)}{dt} = \sum_{i:entradas} \rho_i F_i h_i - \sum_{j:saídas} \rho_j F_j h_j \pm Q \pm W_s$$

$\rho \triangleq$ densidade do material do sistema

$\rho_i \triangleq$ densidade do material do fluxo de entrada i

$\rho_j \triangleq$ densidade do material do fluxo de saída j

$V \triangleq$ volume total do sistema

$F_i \triangleq$ caudal volumétrico da entrada i

$F_j \triangleq$ caudal volumétrico da saída j

$n_A \triangleq$ número de moles do componente A no sistema

$c_A \triangleq$ concentração molar (moles/volume) de A no sistema

$c_{A_i} \triangleq$ concentração molar de A na entrada i

$c_{A_j} \triangleq$ concentração molar de A na saída j

$r \triangleq$ taxa de reação por unidade de volume para o componente A no sistema

$h_i \triangleq$ entalpia específica do material na entrada i

$h_j \triangleq$ entalpia específica do material na saída j

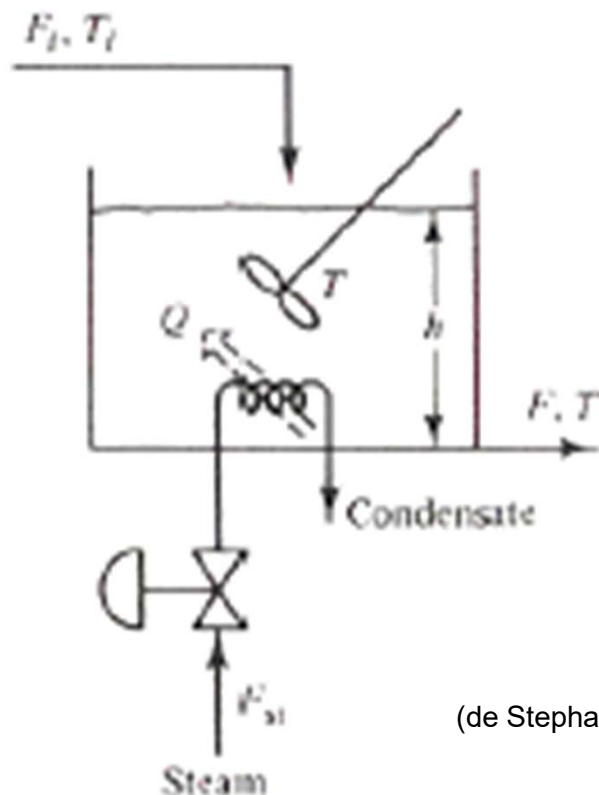
$U, K, P \triangleq$ energia interna(U), cinética(K) e potencial (P)

$Q \triangleq$ quantidade de energia trocada entre o sistema e o seu ambiente por unidade de tempo

$W_s \triangleq$ trabalho (shaft work) trocado entre o sistema e o seu ambiente por unidade de tempo

Aplicando a um sistema qualquer obtêm-se equações diferenciais de 1ª ordem, que constituem o seu modelo matemático.

Exemplo: aquecimento de um tanque bem agitado (stirred-tank)

Seja um tanque que está a ser alimentado por um caudal de líquido *Fi* (m3/min) à temperatura *Ti* (ºC). No tanque é aquecida por uma serpentina a vapor onde entra um caudal de vapor de *Fv* kg/min. Do tanque sai um caudal *F* de líquido à temperatura *T*. O tanque está bem agitado e por isso a temperatura da saída é igual à temperatura dentro do tanque. O vapor de aquecimento, ao perder energia na serpentina condensa, saindo o condensado para o exterior.

(de Stephanopoulus)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_i}{A} - \frac{F}{A}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{Ah} F_i (T_i - T) + \frac{1}{Ah} \frac{Q}{\rho c_p}$$

Note-se que este sistema químico é a conjugação de um fluídico com um térmico

2.6 Sistemas biológicos: Modelo Lotka-Volterra do par predador-presa

Os sistemas biológicos descrevem o funcionamento dos seres vivos.

Este modelo (https://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/engin/predprey/pred2.html 5/08/2022) descreve a interação biológica entre duas espécies, na relação particular em que uma, predadora, come a outra, a presa. Há muitos exemplos na natureza: leão-gazela, pássaro-inseto, pandas-eucaliptos, etc..

Hipóteses simplificadoras:

- a espécie predadora é totalmente dependente da presa (é o seu único alimento).
- a presa tem uma quantidade ilimitada de alimentos
- a presa só tem um predador, o que está a ser considerado e não tem outras limitações.

Na natureza as coisas são mais complicadas, mas assim poderemos desenvolver um modelo aceitavelmente complexo.

Se existirem zero predadores, a presa não tem qualquer limite ao seu crescimento e por isso cresce exponencialmente.

Sendo $x(t)$ a população atual no instante t, a sua taxa de crescimento será, sendo a uma constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

Mas havendo predadores, o crescimento será menor: os predadores introduzem um factor negativo nesta equação.

Se y(t) for a população de predadores no instante t, cada um deles tem certa probabilidade de encontrar uma presa. Essa probabilidade é tanto maior quanto mais predadores existirem e tanto maior quanto mais presas existirem. Por isso se pressupõe que

- a taxa de encontros entre um predador e uma presa é conjuntamente proporcional ao tamanho das duas populações

- dos encontros realizados, uma parte ***b*** fixa resulta na morte da presa

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

Quanto à população de predadores, y, considerando-a isoladamente, não tem alimentos (não há presas) e por isso morre a uma velocidade proporcional ao seu tamanho, ou seja, neste caso,

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t)$$

por não haver energia para novos nascimentos.

Ora felizmente para os predadores existem presas, e por isso eles vão aí buscar energia para se reproduzirem. Por cada encontro predador - presa há uma parte ***p*** que resulta em alimentos para o predador e por isso a sua população variará de acordo com

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t)$$

Juntando as equações obtidas obtém-se o modelo de Lotka-Volterra

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t)$$

composto por duas equações diferenciais de 1ª ordem acopladas, que não podem ser resolvidas separadamente e para as quais não é possível encontrar uma solução analítica (mas apenas computacional).

Pode-se mostrar que existe um par (x_s, y_s) para o qual dx/dt=dy/dt=0, isto é, as populações estão em equilíbrio e não variam ao longo do tempo.

Para isso basta fazer

$$0 = ax(t) - bx(t)y(t)$$
$$0 = -cy(t) + px(t)y(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [a - by(t)]x(t) = 0 \wedge x(t) \neq 0 \\ [-c + px(t)]y(t) = 0 \wedge y(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [a - by(t)] = 0 \\ [-c + px(t)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = \dfrac{a}{b} \\ x(t) = \dfrac{c}{p} \end{cases}$$

um tal estado chama-se **regime permanente** ou **estado estacionário**. O seu valor depende das constantes *a*, *b*, *c*, e *p*, os **parâmetros** do modelo.

Existem outros modelos de duas ou mais populações. Em
https://www.montana.edu/screel/teaching/bioe-370/documents/L-V competition populus.pdf 5/08/2022
encontra-se um modelo de duas populações competindo no mesmo ambiente, (a que os autores também chamam de Lotka-Volerra), mas neste caso não se trata de relação predador-presa. E em
https://pt.scribd.com/document/498569948/25-MultiSpecies 5/08/2022
um modelo de várias espécies de peixes competindo pelos mesmos recursos.

Existem outros modelos que exprimem a:

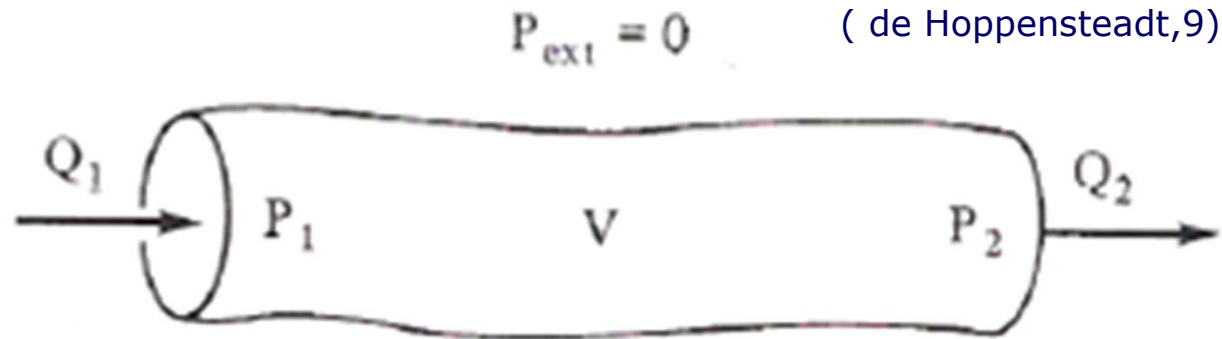
- interação agressiva (combatem-se ativamente, embora não se comam),
- cooperação ou simbiose (ajudam-se mutuamente),
- relação predador-presa,
- interação forte-fraco (uma espécie está mais capacitada para sobreviver).

Ver p. ex. https://en.wikipedia.org/wiki/Biological_interaction 5/08/2022

2.7 Sistemas fisiológicos

Os sistemas fisiológicos compõem-se em grande medida de sistemas dos tipos que vimos (mecânicos, fluídicos, químicos, etc.) que ao incluírem órgãos vivos adquirem, por sinergia, novas propriedades.

Usam-se frequentemente as analogias com os circuitos elétricos para estudar as suas propriedades.

Exemplo: um vaso sanguíneo

$V \triangleq$ volume do vaso

$Q_1 \triangleq$ caudal de entrada

$P_1 \triangleq$ Pressão à entrada do vaso

$Q_2 \triangleq$ caudal de saída

$P_2 \triangleq$ Pressão à saída

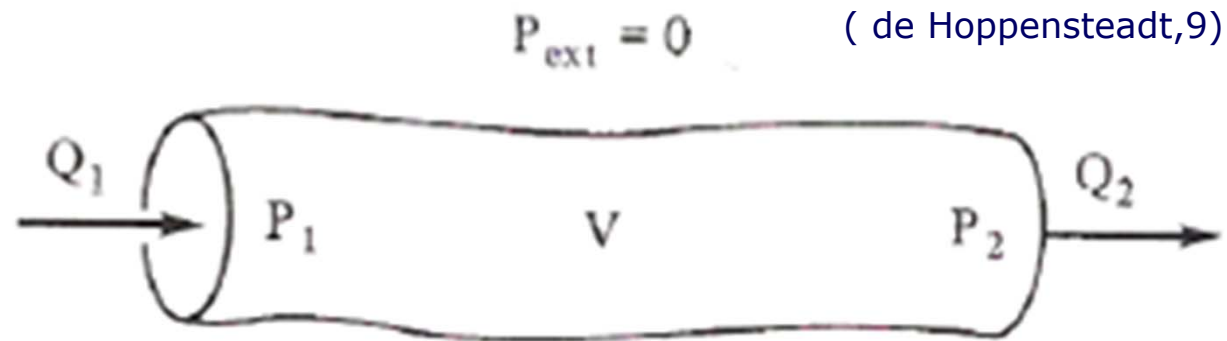
P_{ext} (Pressão exterior) $\triangleq 0$ (referência)

Propriedades essenciais:

Resistência : oposição à circulação

Complacência: aumento do volume com aumento do caudal

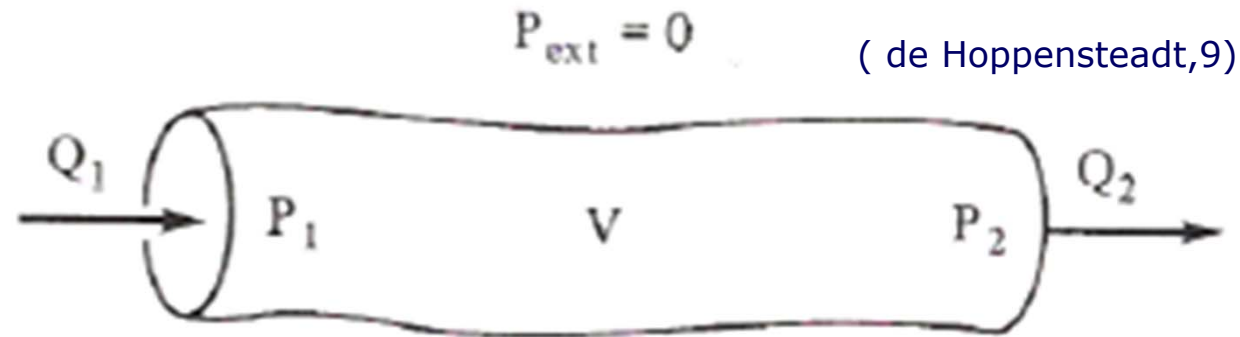
Resistência do vaso

(de Hoppensteadt,9)

Para um vaso sem complacência, rígido, de volume constante e bem conhecido, teremos, como nos sistemas fluídicos,

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

A ***R*** chama-se **resistência** do vaso e teremos aqui um vaso de resistência.

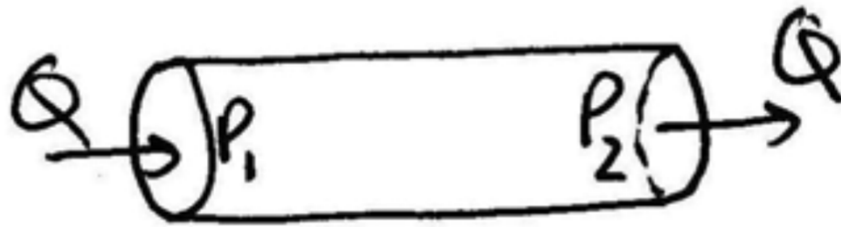
Complacência do vaso

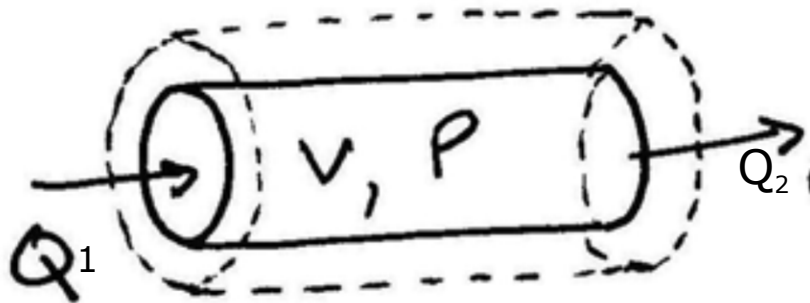
(de Hoppensteadt,9)

Num vaso elástico sem qualquer resistência fluídica, a pressão na entrada é igual à pressão na saída, para qualquer valor de Q,

$$P_1 = P_2 = P$$

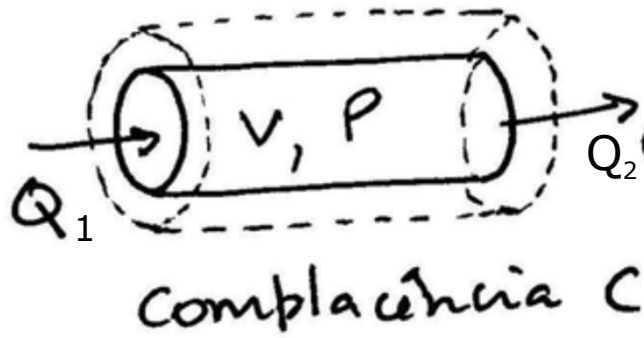
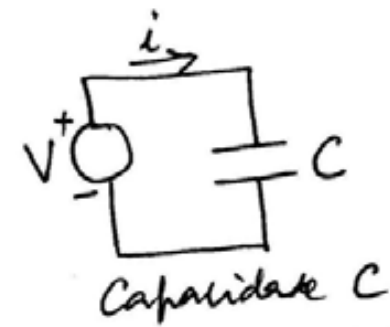
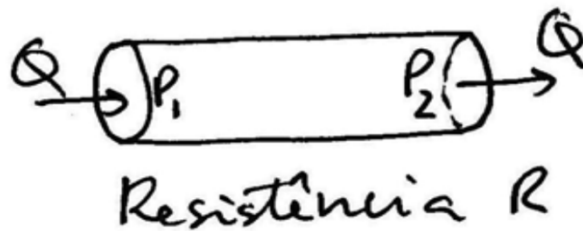
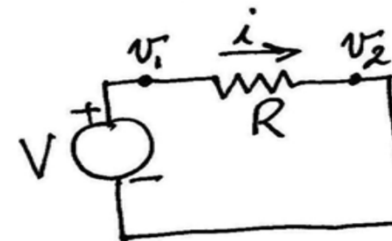
A relação entre a pressão ***P*** e o volume ***V*** do vaso pode ser aproximada pela relação

$$V = CP \quad \Rightarrow \quad C = \frac{V}{P}$$

em que a constante ***C*** se chama a complacência do vaso.

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

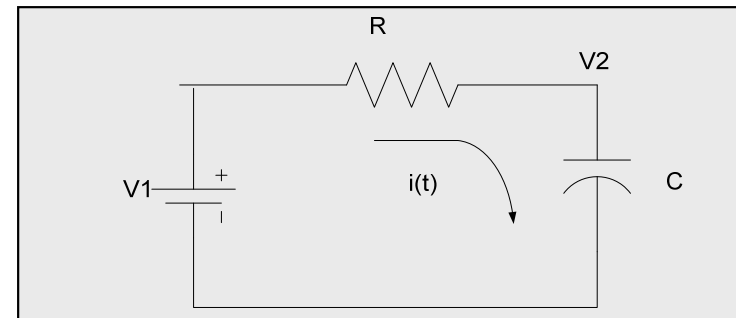
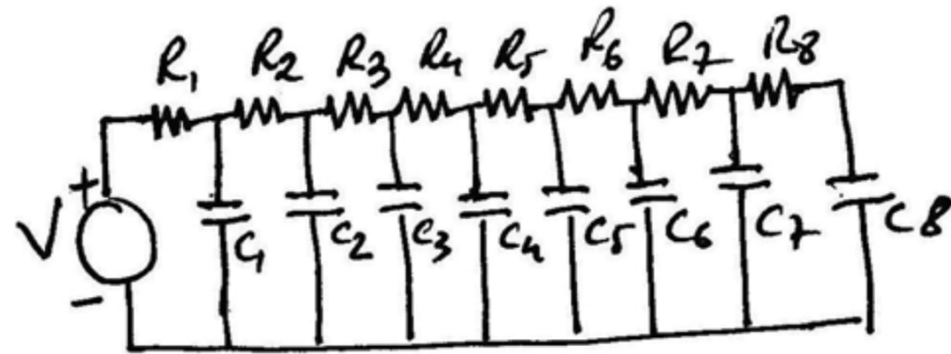
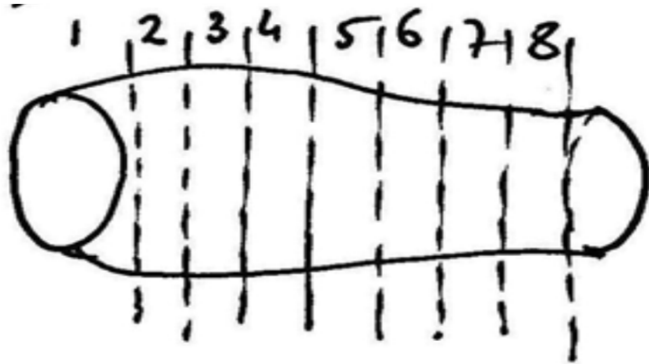
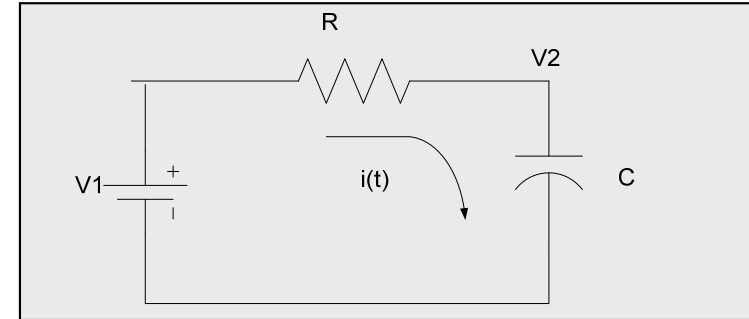
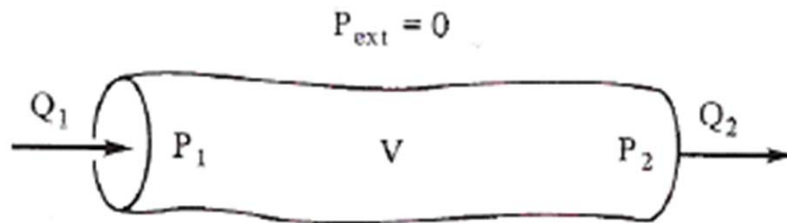
Um vaso rígido, puramente resistivo

$$V = CP \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = C\,\dot{P}$$

$$Q_1 \neq Q_2$$

Um vaso puramente elástico, sem resistência

$$V = CP$$

$$Q = CV$$

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

Resistência e Complacência simultaneamente

v_1 variável

$$C\frac{dv_2}{dt} = \frac{v_1 - v_2}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2}{RC} + \frac{v_1}{RC}$$

P_1 variável

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{P_2}{RC} + \frac{P_1}{RC}$$

$$E = \frac{1}{2}CP^2$$

Vaso		Circuito eléctrico	
Pressão,	P	V,	Tensão
Volume,	V	Q,	Carga,
Caudal,	Q	i ,	Corrente,
Resistência,	R	R,	Resistência
Complacência,	C	C,	Condensador C

$$E = \frac{1}{2}CV^2$$

2.8. Simulação das equações diferencias

Três blocos electrónicos básicos:

v_1, v_2, v_3 → (+) → v_4

Somador

$v_4=v_1-v_2+v_3$

v_i → [A] → v_o

$v_o = A\,v_i$

Amplificador

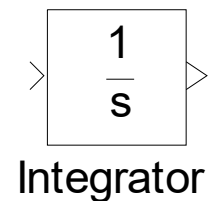
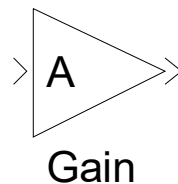
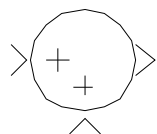
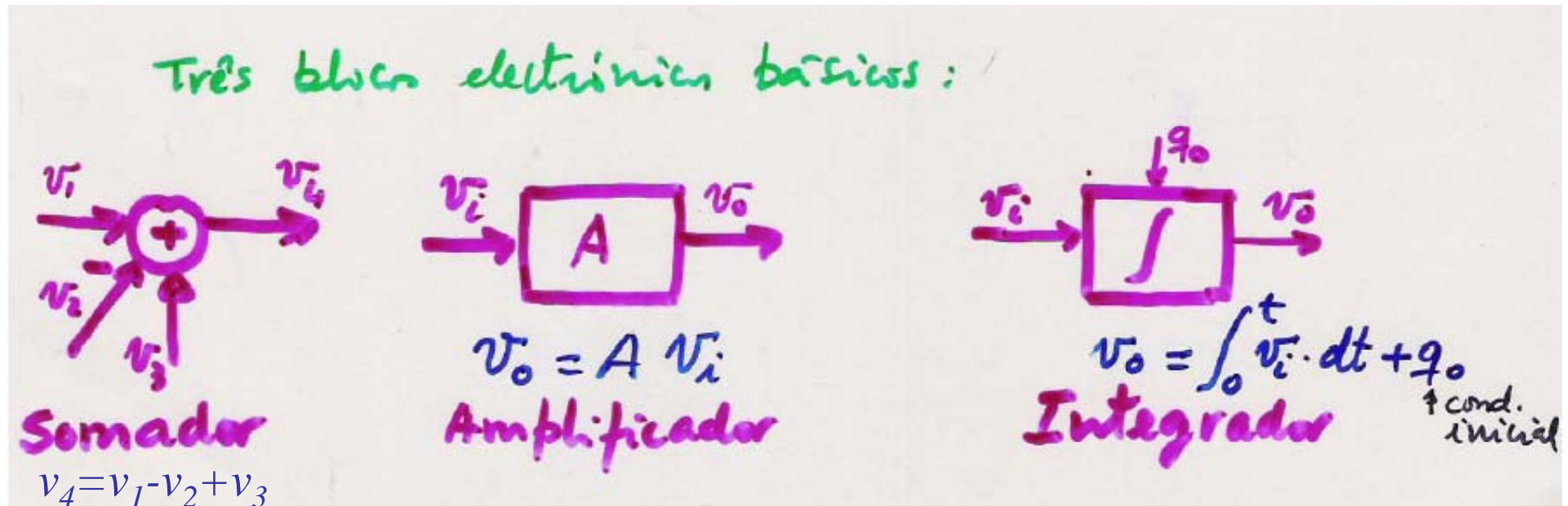
v_i → [∫] → v_o (q_o)

$v_o = \int_0^t v_i \cdot dt + q_o$ (↑ cond. inicial)

Integrador

Gain

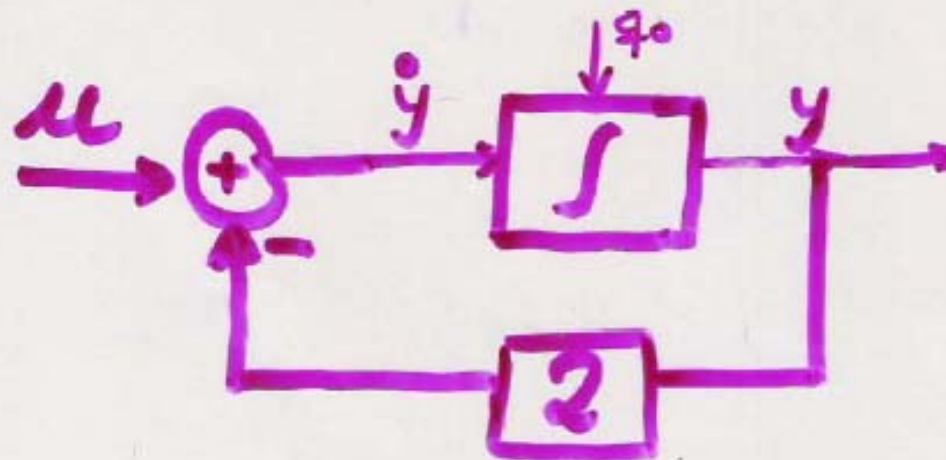
$\frac{1}{s}$

Integrator

Corresponding Simulink blocks

Exemplo: Equação diferencial de 1ª ordem

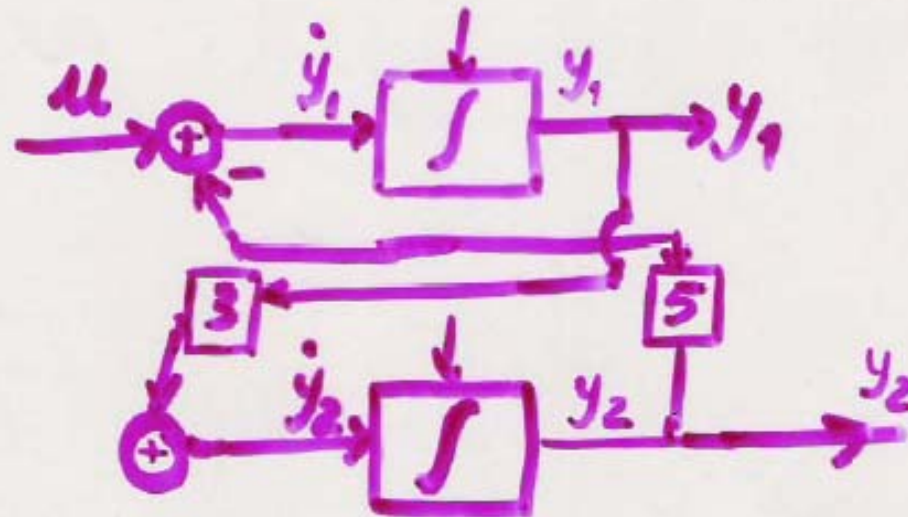
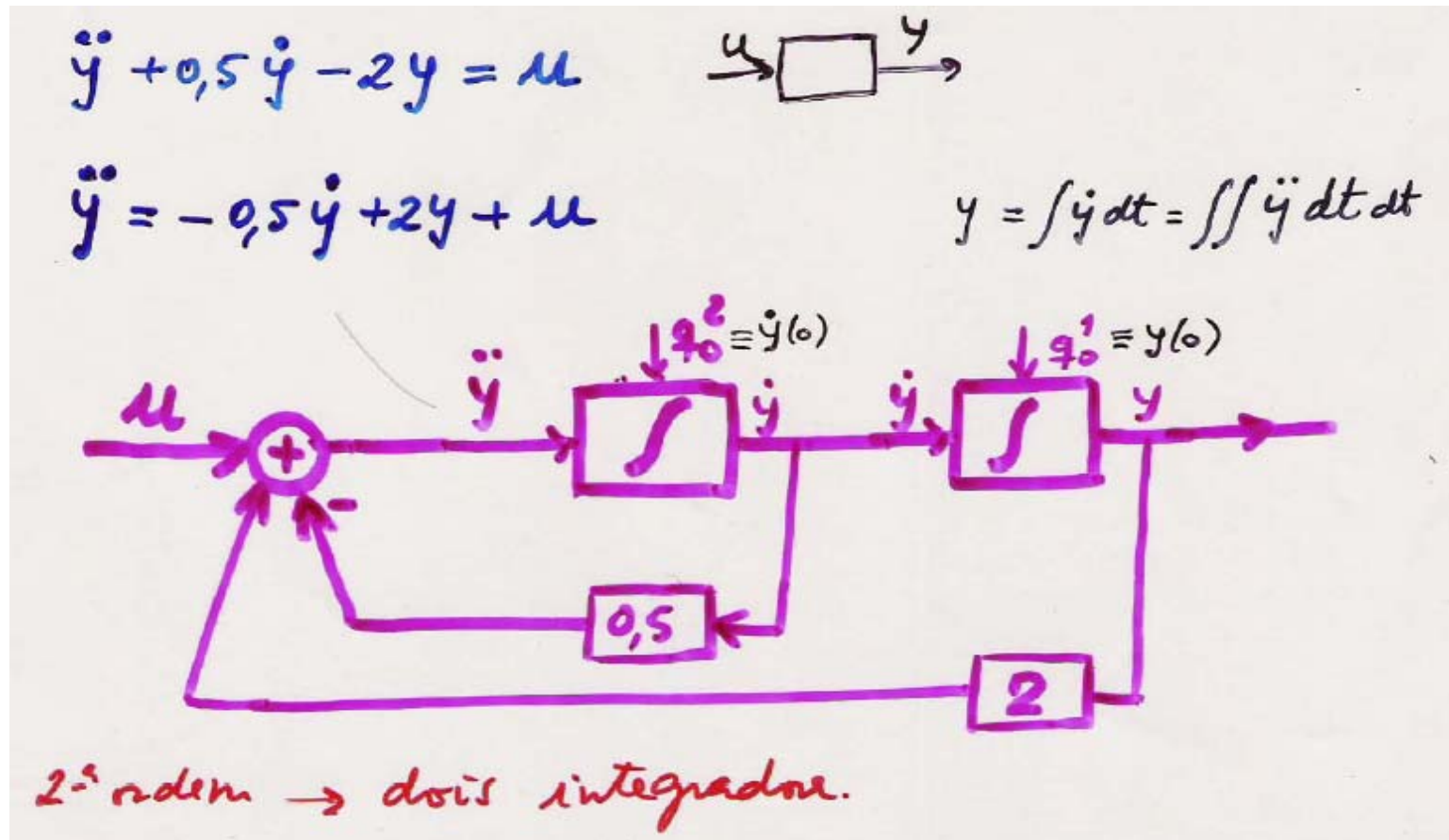
$$\dot{y} + 2y = u$$

(eq. dif. de 1ª ordem)

$$\dot{y} = -2y + u$$

eq. dif. de 1ª ordem — foi necessário um integrador

Exemplo: 2 equações diferenciais de 1ª ordem

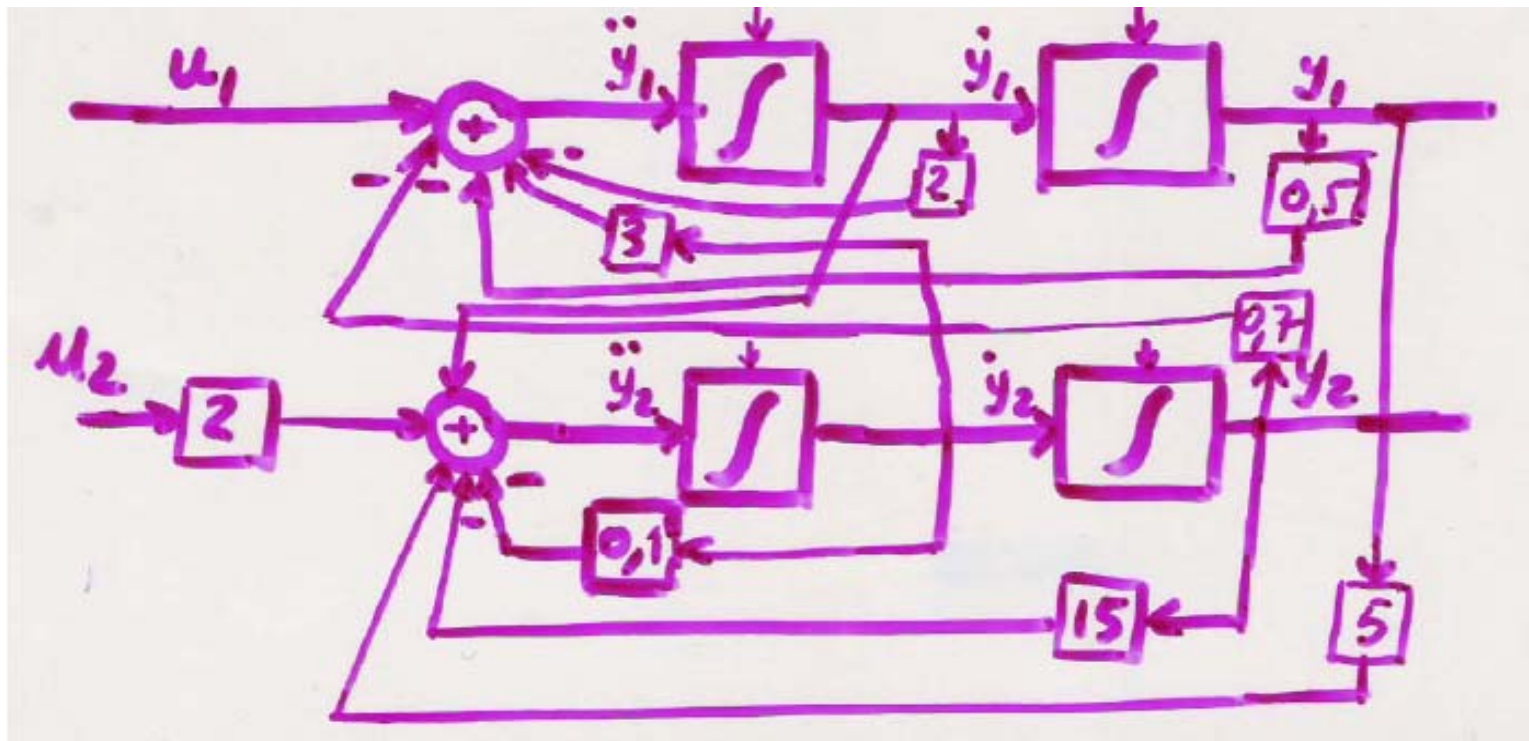
$$\dot{y}_1 + 5y_2 = u \qquad \dot{y}_1 = -5y_2 + u$$

$$\dot{y}_2 - 3y_1 = 0 \qquad \dot{y}_2 = 3y_1$$

Exemplo: Equação diferencial de 2ª ordem

Exemplo: 2 equações diferenciais de 2ª ordem

$$\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 - 3\dot{y}_2 + 0{,}5\, y_1 + 0{,}7\, y_2 = u_1$$

$$\ddot{y}_2 + 0{,}1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - 5\, y_1 + 15\, y_2 = 2\, u_2$$

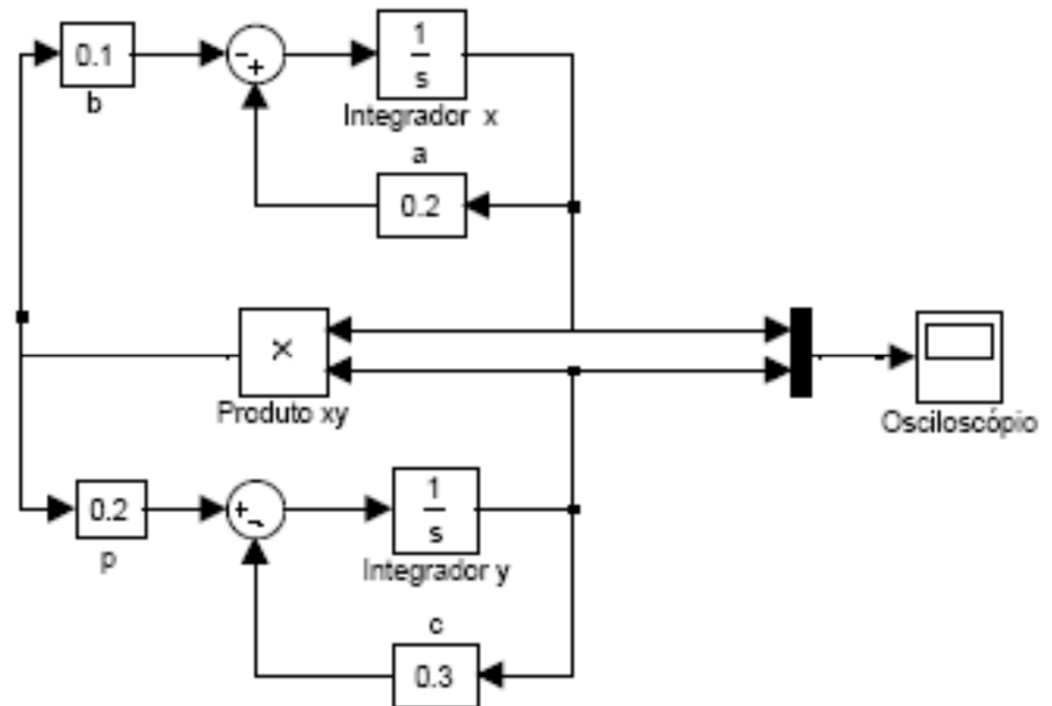
$$\ddot{y}_1 = -2\dot{y}_1 + 3\dot{y}_2 - 0{,}5\, y_1 - 0{,}7\, y_2 + u_1$$

$$\ddot{y}_2 = -0{,}1\dot{y}_2 + \dot{y}_1 + 5\, y_1 - 15\, y_2 + 2\, u_2$$

Simulação de equações diferenciais não lineares

Modelo de **Lotka-Volterra**

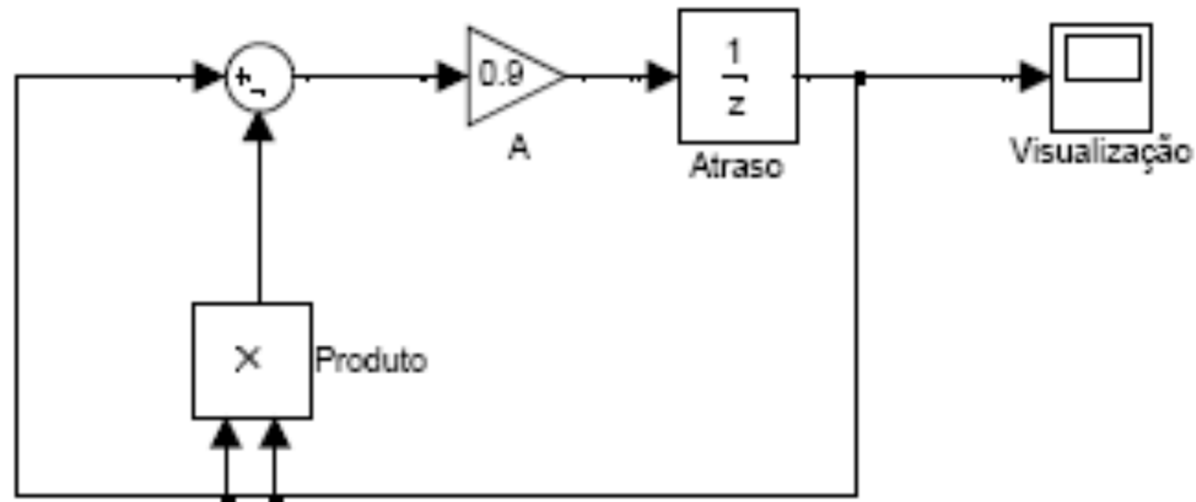
$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t)$$

Diagrama no **SIMULINK**

Simulação de equações de diferenças não-lineares

Modelo do crescimento de uma população isolada

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = Ax_k - Ax_k^2$$

Diagrama no SIMULINK

Conclusão

- Na generalidade dos sistemas podem-se aplicar os princípios básicos (do respetivo domínio) para se obter um conjunto de equações diferenciais (nos sistemas contínuos) ou de diferenças (nos sistemas discretos), que são uma representação matemática do sistema e constituem por isso um modelo matemático.

- Esse modelo servirá para o estudo do comportamento do sistema (a sua evolução temporal, por exemplo) e contém características matemáticas que exprimem propriedades internas essenciais do sistema.

- Obtido o modelo, importa saber como e para que se vai usar, e é esse o tema dos próximos capítulos.

Bibliografia

Baura, G. D., *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals*, , John Wiley and Sons, 2002

Bruce, Eugene N., *Biomedical Signal Processing and Signal Modelling*, John Wiley and Sons, 2001.

D'Azzo, John J. and Constantine H. Houpis Linear Control System Analysis and Design with Matlab, 5th Ed. Marcel Dekker 2003.

Carvalho, M., *Sistemas de Controlo Automático*, LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

Chen, T. *Systems and Signals Analysis*, 2nd Ed, Sunders College Publ, 1994

Hoppensteadt, F.C. and Charles S. Peskin,, *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences* , Springer Verlag, 2000

McMahon, Thomas A., *Muscles, Reflexes and Locomotion*, Princeton University Press, 1984.

Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares*,., IST Press 2002

Stephanopoulos, G., *Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice*,. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.

Witten (Ed) M, *Mathematical models in medicine : diseases and epidemics*, Pergamon, 1987.

Simulink Users Guide, The Mathworks Inc., 2019.

CAPÍTULO 3

DINÂMICA DOS SISTEMAS BIOLÓGICOS E FISIOLÓGICOS

Do capítulo 2 ...

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

u → [ ] → y

Aplicando uma entrada u qualquer, qual o y obtido?

→ resolução da equação diferencial

..... como ???

TRANSFORMADA DE LAPLACE $\mathcal{L}$

Equação dif. no domínio temporal

Solução no domínio temporal

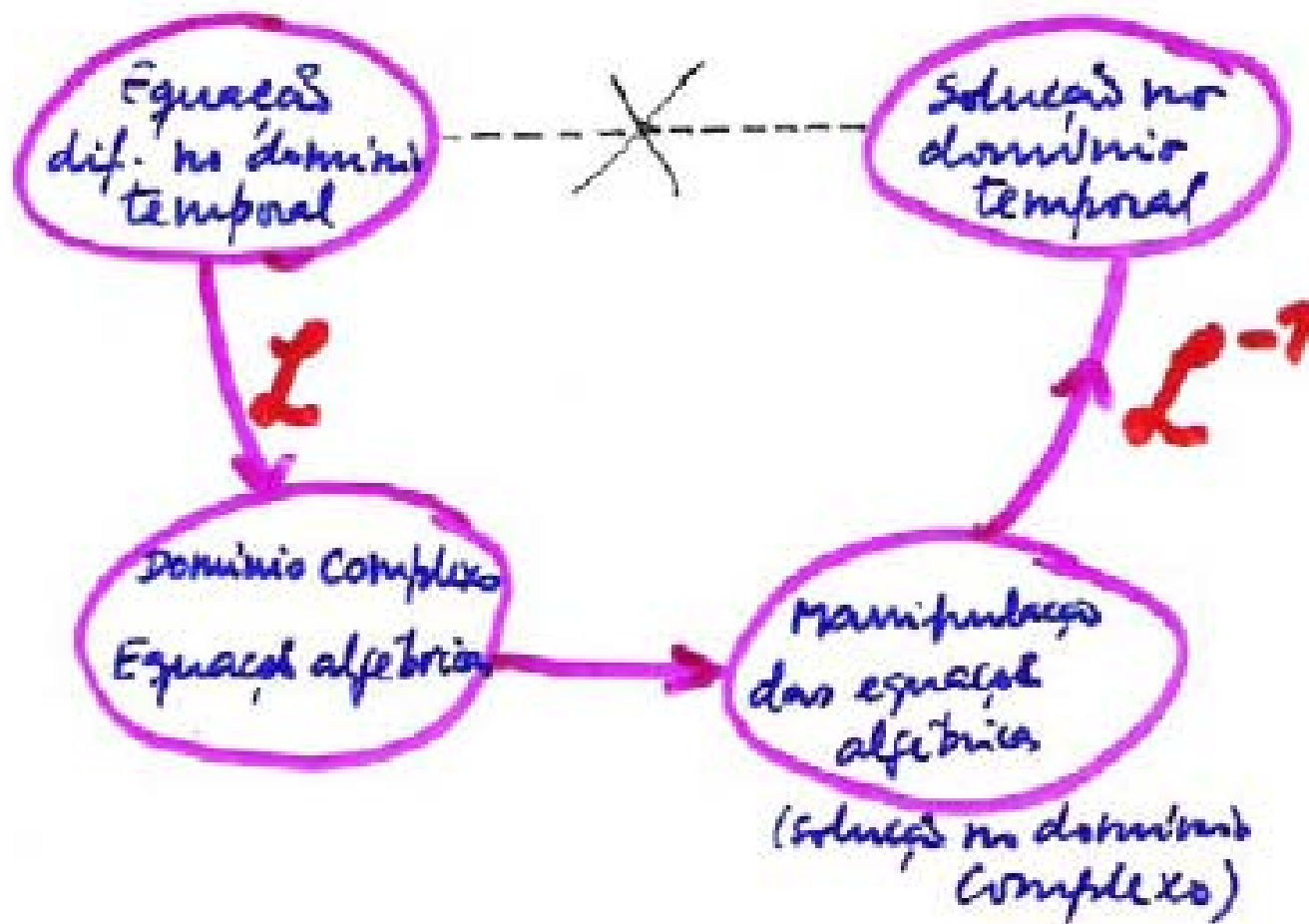
$\mathcal{L}$

$\mathcal{L}^{-1}$

Domínio complexo

Equações algébricas

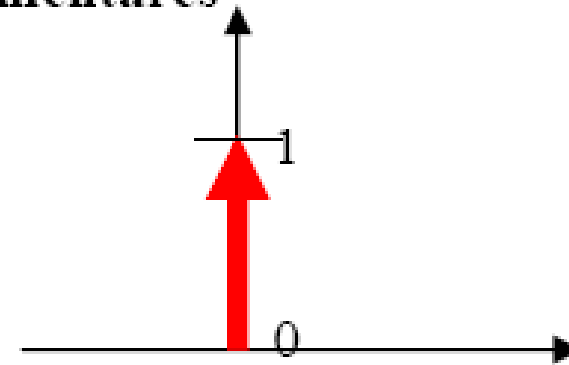
Manipulação das equações algébricas

(solução no domínio complexo)

3A.4. Transformada de Laplace de funções elementares

Impulso de Dirac

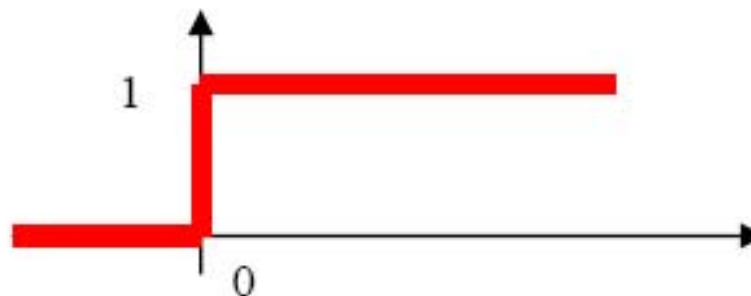
$$\delta(t) = \begin{cases} \neq 0, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

1

0

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

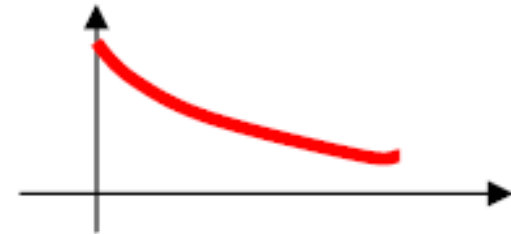
(todo o $\delta(t)$ está dentro dos limites de integração)

i) Degrau unitário

$$q(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$f(s)=\mathcal{L}\left[q(t)\right]=\int_0^{\infty} q(t)\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot dt$$

$$=-\frac{1}{s}\left[e^{-s\infty}-e^{-s0}\right]=-\frac{1}{s}\left[0-1\right]=\frac{1}{s}$$

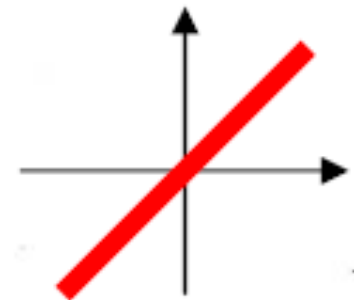
ii) **Exponencial**

Exponencial e^{-at}

$$f(s) = \mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} \cdot dt$$

$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a) \cdot t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{-1}{s+a} \left[0 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{s+a}$$

iii) **Rampa unitária**

Rampa unitária $f(t) = t$

$$F(s) = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t \cdot dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

3A.4. Propriedades da transformada de Laplace

i) Linearidade

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \qquad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad , \alpha, \beta \text{ ctes}$$

ii) **derivação no domínio temporal**

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - \underbrace{s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - s^{n-3}\ddot{f}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}_{\text{nulo se } f(t)=0,\ t<0}$$

derivar no domínio temporal $\Leftrightarrow$ multiplicar por s no domínio complexo

$$\frac{d}{dt} \Leftrightarrow s$$

iii) integração no domínio temporal

Integração no domínio temporal – divisão por s no domínio complexo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\int_0^t \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

iv) **deslocamento no domínio complexo**

Deslocamento no domínio complexo – multiplicação por e^{-at} no domínio temporal

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$$

viii) **deslocamento no domínio temporal**

Deslocamento no domínio temporal – multiplicação por e^{-as} no domínio complexo

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\right] = e^{-as} F(s)$$

iv) Teorema do valor final

Este teorema relaciona no comportamento de f(t) no infinito com o comportamento de F(s) na origem

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$$

(se F(s) não tem polos no SPD)

v) Teorema do valor inicial

Relaciona o comportamento de f(t) na origem com o comportamento de F(s) no infinito.

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

(se F(s) é estritamente própria

3.5. Inversão da Transformada de Laplace: decomposição em frações parciais

Uma transformada de Laplace é em geral uma função racional, dada por

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$, função racional

$N(s)$: polinómio de s de coeficientes reais

$D(s)$: polinómio de s de " "

Diz-se que ela é:

$F(s)$ própria : grau $N(s) \leq$ grau $D(s)$

$F(s)$ estritamente própria : grau $N(s) <$ grau $D(s)$

$F(s)$ biprópria : grau $N(s) =$ grau $D(s)$

$F(s)$ imprópria : grau $N(s) >$ grau $D(s)$

Definição de **pólos** e **zeros** fe F(s)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s) e D(s) são polinómios **co-primos** (não têm raízes comuns) com coeficientes reais.

pólos: raízes da equação $D(s)=0$

zeros: raízes da equação $N(s)=0$

Como sabemos, uma equação de coeficientes reais pode ter raízes

- **reais simples**
- **reais múltiplas**
- **complexas aos pares conjugados (conjugadas)**

e por isso os pólos e zeros podem ter qualquer dessas formas.

Quando F(s) é própria, sendo N(s) e D(s) co-primos, o

Exemplo:

$$F(s) = \frac{2s^4 + s^3 - 2s}{s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8}$$, biprópria

i) factorização do denominador

den = [1, 7, 18, 20, 8]; p = roots (den)   Matlab

→ p = [-1, -2, -2, -2]

$$s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8 = (s+1)(s+2)^3$$

$(s+1)$ → polo real simples

$(s+2)^3$ → polo real de multiplicidade 3

$$F(s) = \frac{2s^4 + s^3 - 2s}{(s+1)(s+2)^3}$$

ii) decomposição em fracções parciais

$$F(s) = A.1 + A_1 \frac{1}{s+1} + A_2 \frac{1}{s+2} + A_3 \frac{1}{(s+2)^2} + A_4 \frac{2}{(s+2)^3}$$

todos estes termos existem na tabela

iii) inversão

$$f(t) = A_0\,\delta(t) + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + A_3\, t\, e^{-2t} + A_4\, t^2 e^{-2t}$$

como calcular A_0, A_1, A_2, A_3, A_4? → cálculo dos resíduos

3.6. Aplicação da Transformada de Laplace à resolução de equações diferenciais

Seja por exemplo a equação diferencial de 2ª ordem

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = u$$

Aplicação de L a ambos os lados da equação:

i) $\mathcal{L}[a\ddot{y}+b\dot{y}+cy]=\mathcal{L}[u]$

ii) pela linearidade de $\mathcal{L}$

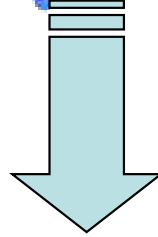
$$a\,\mathcal{L}[\ddot{y}]+b\,\mathcal{L}[\dot{y}]+c\,\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u]$$

iii) pelo teorema da derivação,

$$\mathcal{L}[\ddot{y}]=s^2L[y]-s\,y(0)-\dot{y}(0)=s^2Y(s)-s\,y(0)-\dot{y}(0)$$

$$\mathcal{L}[\dot{y}]=s\,L[y]-y(0)=s\,Y(s)-y(0)$$

$$\mathcal{L}[y]=Y(s)$$

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = u$$

$$s^2 a Y(s) - s a y(0) - a\dot{y}(0) + s b Y(s) - b y(0) + c Y(s) = U(s)$$

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = (as + b)y(0) + a\dot{y}(0) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(as+b)y(0) + a\dot{y}(0)}{as^2 + bs + c}}_{\text{saída devida às condições iniciais, } Y_{zi}} + \underbrace{\frac{U(s)}{as^2 + bs + c}}_{\text{saída devida à entrada, } Y_{zs}}$$

Tabela das Propriedades da Transformada de Laplace

Property	Time function	Laplace transform
Linearity	$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$	$\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$
s-shifting	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Time shifting	$f(t-T)q(t-T)$, for $T \geq 0$	$e^{-sT} F(s)$
s-differentiation	$tf(t)$	$\frac{-d}{ds} F(s)$
Time differentiation	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0-)$
	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0)$
Time integration	$\int_{0-}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Time scaling	$f(at)$, for $a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Convolution	$\int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$	$H(s)U(s)$
Final value	$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$	(if $sF(s)$ has no open RHP poles)
Initial value	$f(0+) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$	(if $F(s)$ is strictly proper)

Tabela da Transformada

Sem oscilações

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1 or $q(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n (n: positive integer)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at} (a: real or complex)	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Com oscilações

$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

Exemplo (Bruce):

Imagine-se um músculo de rã fixo por uma extremidade e no qual se suspende uma corpo de massa M. O músculo, devido à sua elasticidade, alonga-se. Pode-se desenhar um equivalente mecânico de translação com uma mola K (elasticidade), atrito viscoso B, massa M.

A força aplicada à massa é a da gravidade e igual ao seu peso: F=Mg.
O atrito e a mola reagem com as forças

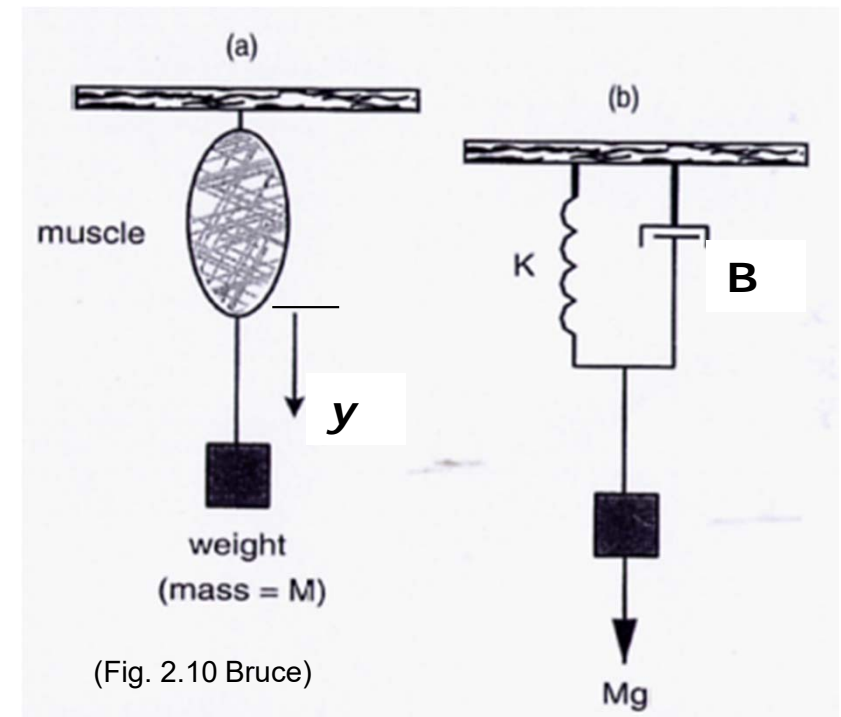
$$\text{atrito}: \; F_B = B\frac{dy}{dt} = B\dot{y}$$

$$\text{mola}: \; F_K = Ky$$

A força resultante é a soma das três e produz o deslocamento *y.* Pela Lei de Newton :

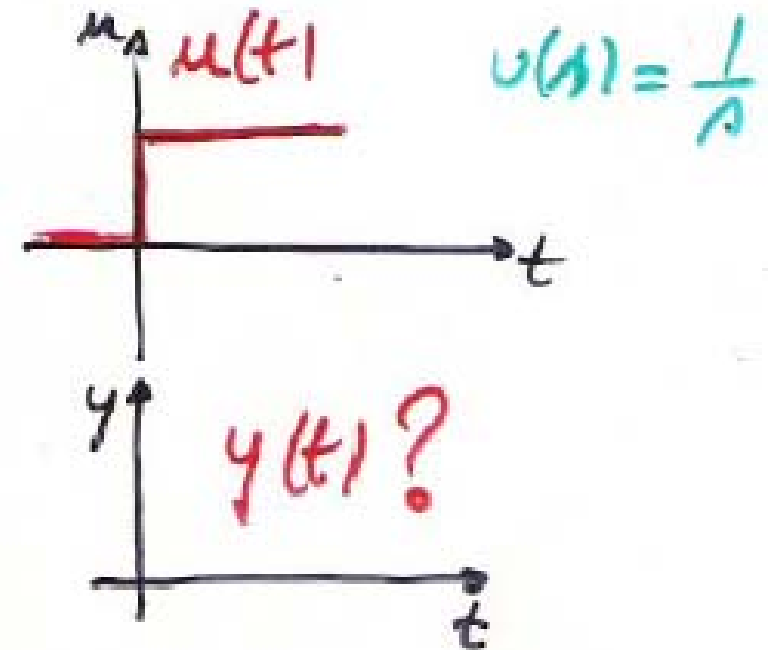
$$Mg - Ky - B\dot{y} = M\ddot{y} \;\; \Rightarrow \;\; M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = Mg$$

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = g$$

Uma equação diferencial de segunda ordem, linear.

(Fig. 2.10 Bruce)

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$$

$u = Mg$

Se, para fins ilustrativos, supusermos M=2, B=3, K=1, vem

Nota: se se considerar $g=9{,}8ms^{-2}$, então u=2*9,8=19,6, ou seja, uma degrau de amplitude 19,6. No entanto um degrau unitário é representativo para a resposta do sistema; é como se o caso se desse num planeta de gravidade $g=0{,}5ms^{-2}$.

Aplicando a Transformada de Laplace

$$2\left[s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right] + 3\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = U(s)$$

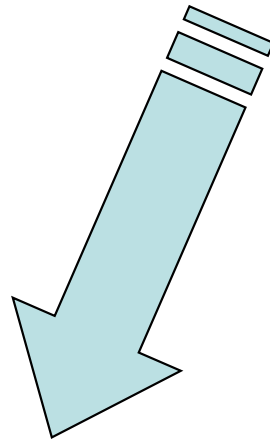
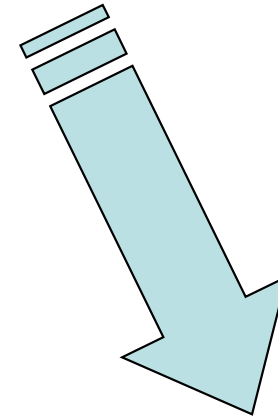
$$(2s^2+3s+1)\,Y(s) = 2s\,y(0) + 2\dot{y}(0) + 3y(0) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(2s+3)\,y(0) + 2\dot{y}(0)}{2s^2+3s+1}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{1}{2s^2+3s+1}}_{Y_{zs}}\,U(s)$$

dado: $y(0) = -1$
$\dot{y}(0) = 1$

$$= \frac{-(2s+3)+2}{2s^2+3s+1} + \frac{1}{(2s^2+3s+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

(u: degrau)

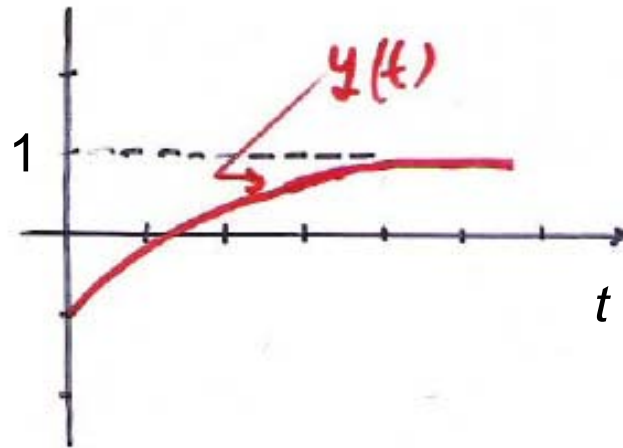
$$Y = Y_{zi} + Y_{zs}$$

Efeito das condições iniciais

Efeito da entrada externa

$$Y(s) = \frac{-s^2 - 0{,}5s + 0{,}5}{s(s+1)(s+0{,}5)}$$

$$= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+0{,}5}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{0}{s+1} - 2\,\frac{1}{s+0{,}5}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{0}{s+1} - 2\frac{1}{s+0,5}$$

$$y(t) = 1 - 2e^{-0,5t} \quad , \quad t \geq 0$$

3.7 Polinómio característico, modos do sistema e estabilidade

Se entrada nula, $Y = Y_{zi}$, resposta não-forçada ou resposta natural

A resposta natural é uma combinação linear dos modos

$$y_{zi}(t) = 2[y(0)+\dot{y}(0)]\,e^{-0,5t} + [-y(0)-2\dot{y}(0)]\,e^{-t}$$

Os coeficientes da combinação linear dependem das condições iniciais

Estabilidade (resposta natural)

Se um dos modos tender para infinito, a resposta natural tende para infinito, o sistema diz-se **instável**

Condição necessária e suficiente de estabilidade:

- Se as raízes do polinómio forem todas menores que zero
- Se as raízes do polinómio forem menores que zero excepto uma (e só uma) que pode ser zero para o caso da resposta natural, não forçada

Resposta forçada (condições iniciais nulas)

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2+3s+1} U(s) = G(s)\,U(s)$$

Y_{zs} (sob $2s^2+3s+1$)

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (aponta para $G(s)$)

relação entre as transformadas da saída e de entrada, com condições iniciais nulas.

$$G(s) = \frac{1/2}{(s+0,5)(s+1)}$$

Polos:

-0,5 -1

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

PARA CONDIÇÕES INICIAIS NULAS

$$G(s) = \frac{1/2}{(s+0,5)(s+1)}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{(degrau unitário)}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1/2}{(s+0,5)(s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{A_1}{s+0,5} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s} = -2\frac{1}{s+0,5} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

$$y(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-0,5t}, \quad t \geq 0$$

devido à entrada $U(s)$

devido aos dois pólos do sistema

Estabilidade (resposta forçada)

$$y(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-0,5t}, \quad t \geq 0$$

devida à entrada $v(n)$

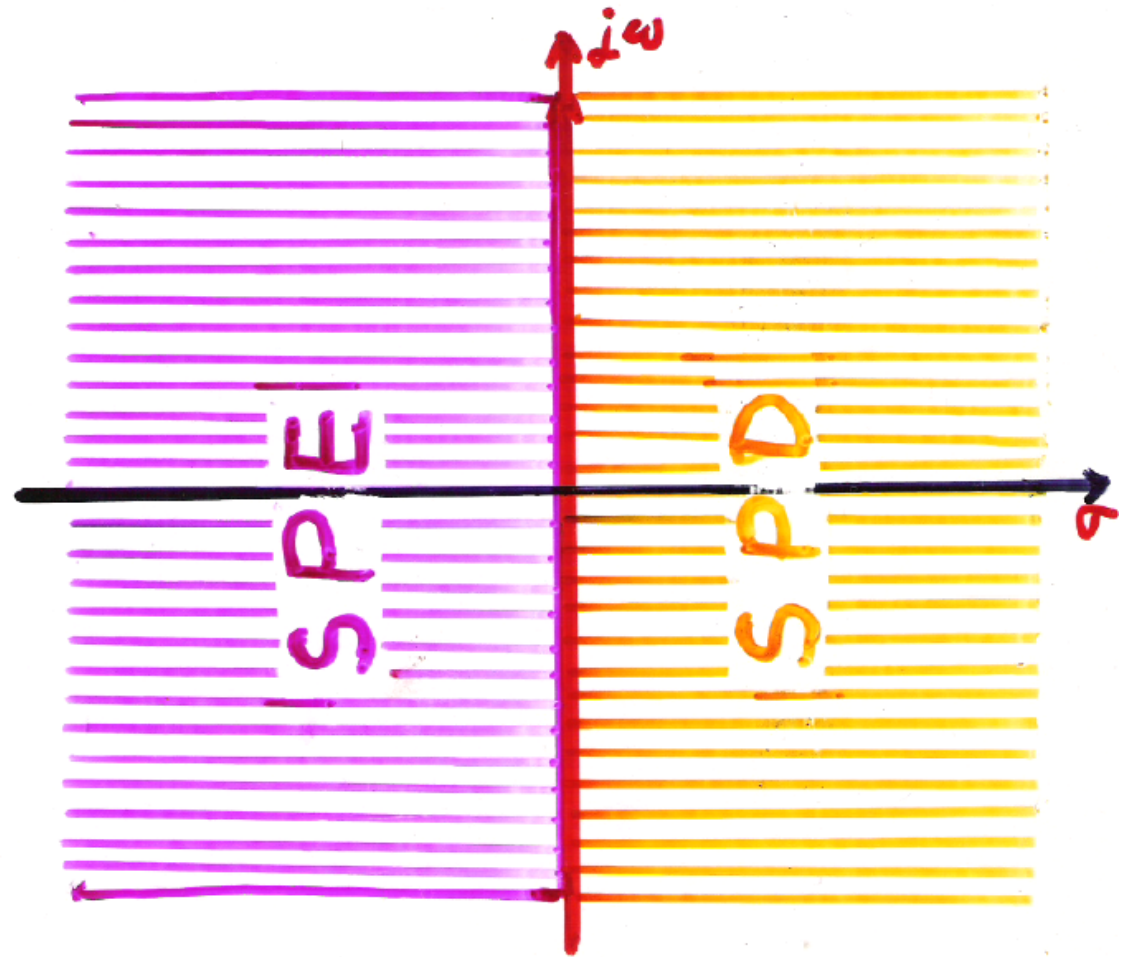
devida aos dois polos do sistema

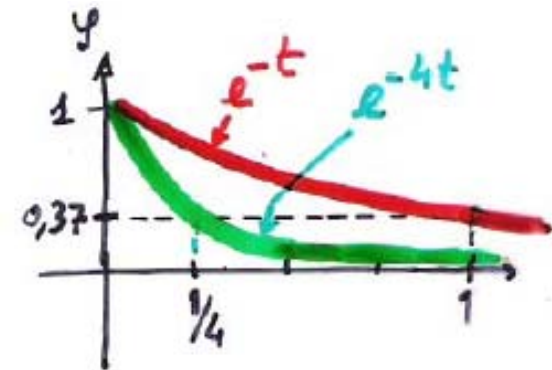
Estabilidade !!!

Ambas as exponenciais são decrescentes; a saída tende para um valor finito constante

Instabilidade !!!

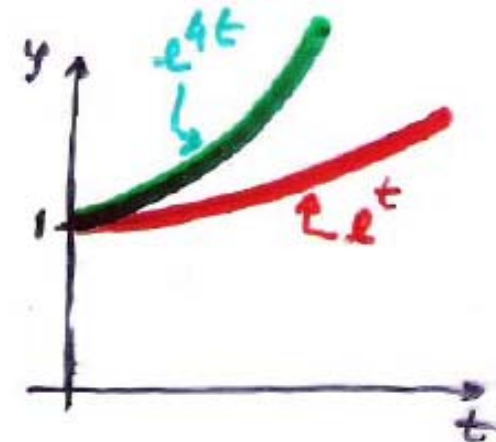
Se uma das exponenciais fosse crescente a saída tenderia para infinito, seria ilimitada, embora a entrada fosse limitada.

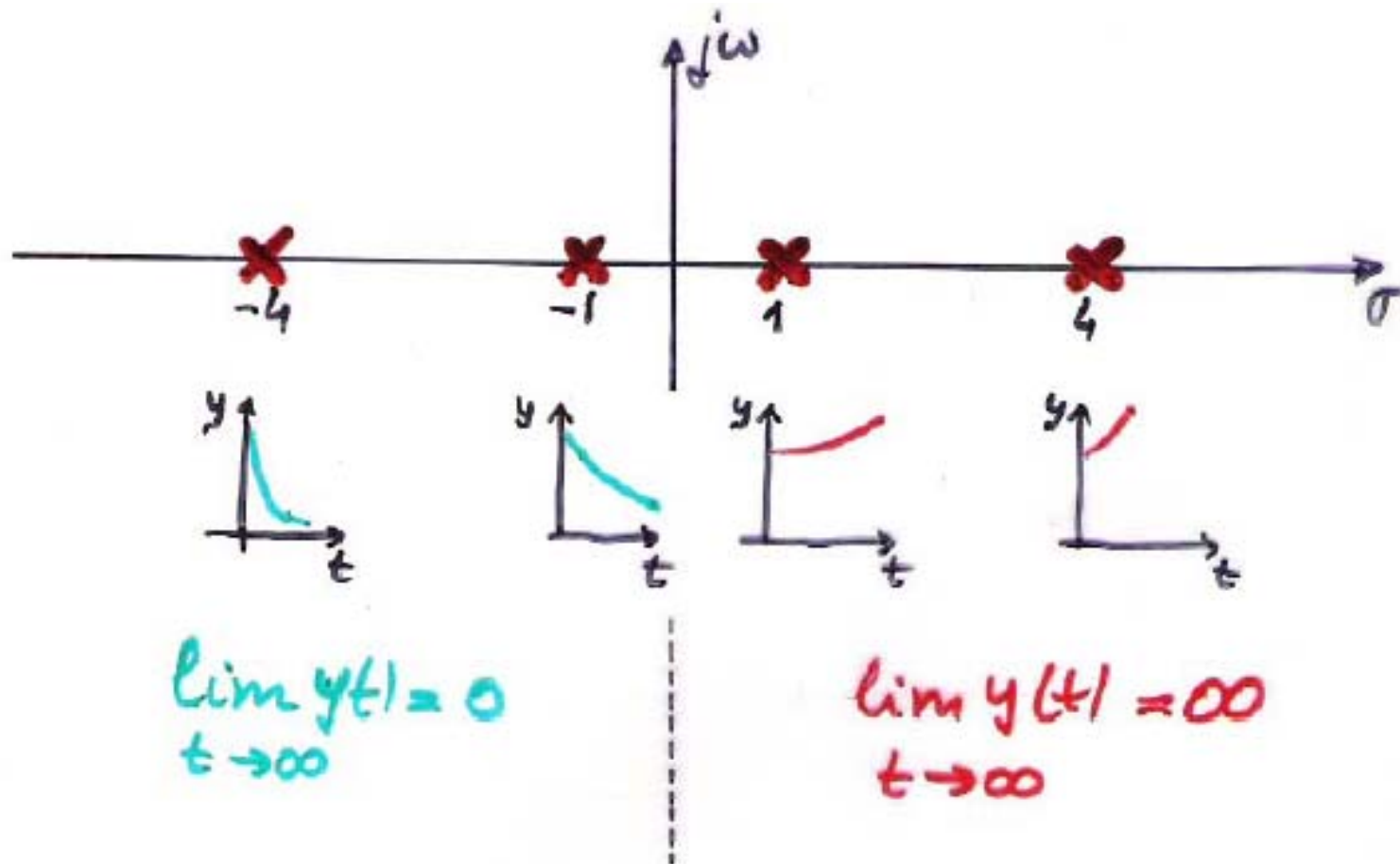
3.8 O plano complexo

Polo real simples

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \longrightarrow y(t) = 1.e^{-t}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+4} \longrightarrow y(t) = 1.e^{-4t}$$

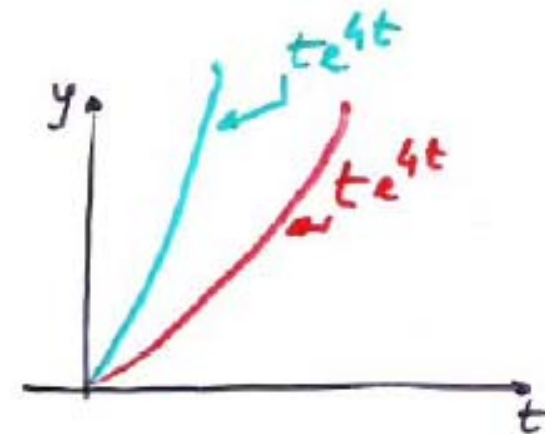
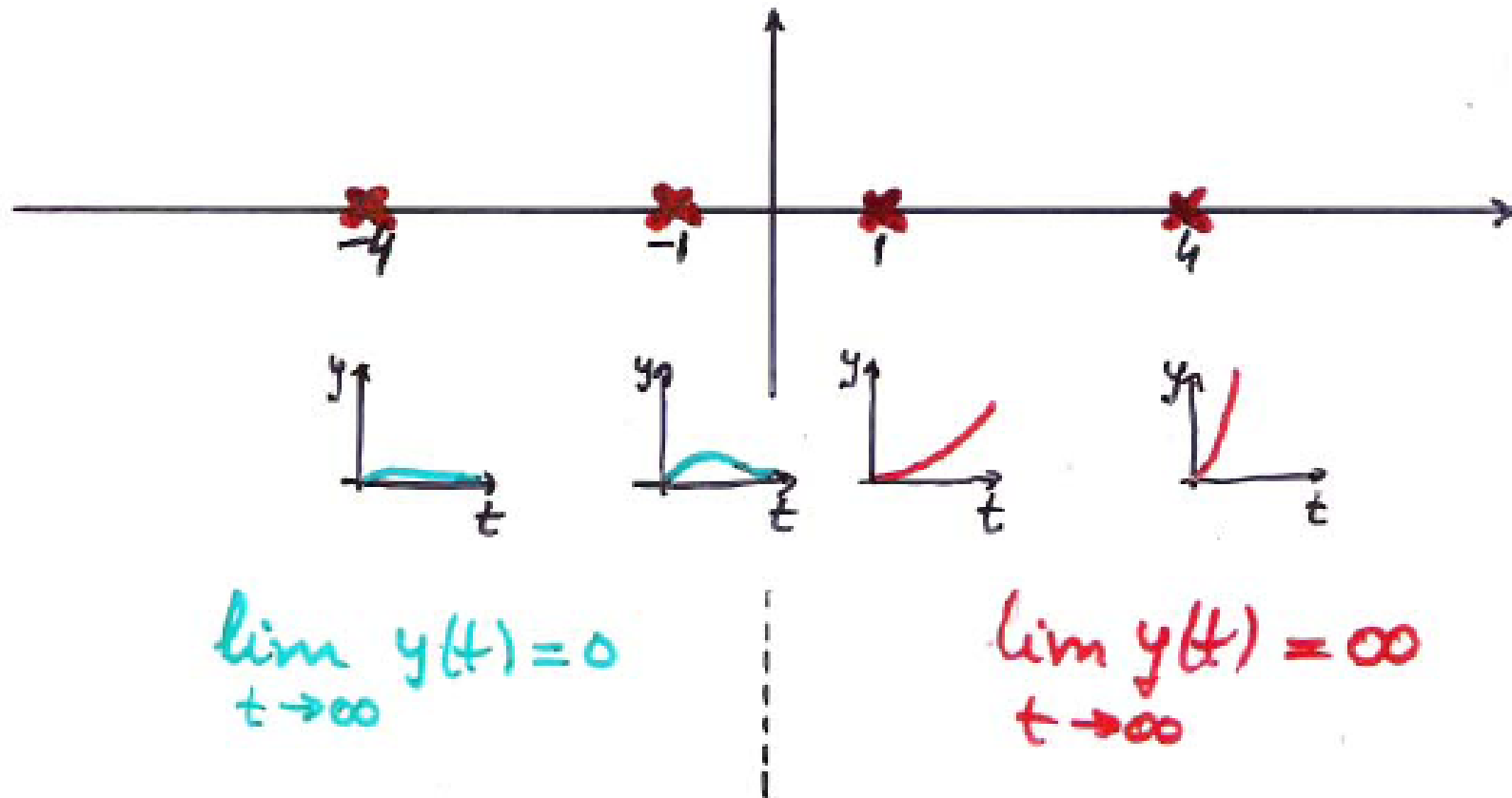
$$Y(s) = \frac{1}{s-1} \longrightarrow y(t) = 1.e^{t}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-4} \longrightarrow y(t) = 1.e^{4t}$$

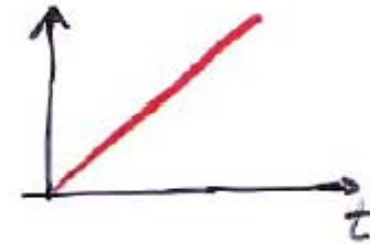
y
1
0,37
1/4
1
e^{-t}
e^{-4t}

y
1
t
e^{4t}
e^{t}

Polo real simples

Polo real duplo

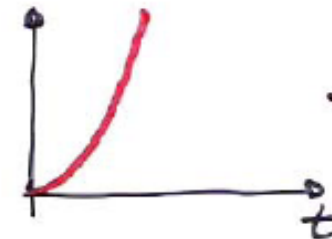
$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \longrightarrow y(t) = t e^{-t}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+4)^2} \longrightarrow y(t) = t e^{-4t}$$

Polo real duplo

Polos na origem

Pólo simples em G(s), entrada em degrau

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow y(t)=t\Rightarrow\lim_{t\to\infty}y(t)=\infty$$

Instável !!!

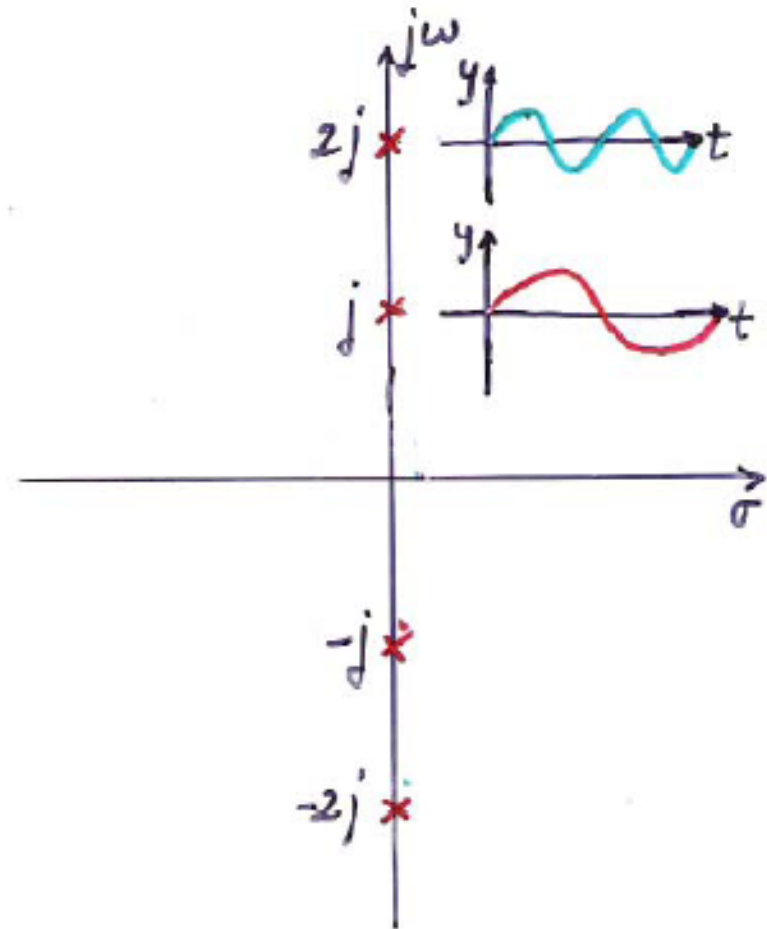
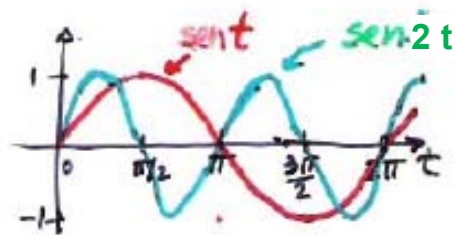
Pólo duplo em G(s), entrada em degrau

$$Y(s)=\frac{1}{s^3}\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}t^2\Rightarrow\lim_{t\to\infty}y(t)=\infty$$

Instável !!!

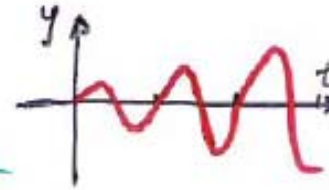
… origem é um ponto de instabilidade !!!

Polo imaginário simples

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow y(t) = \text{sen}\, t$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2t$$

Polo imaginário múltiplo

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \longrightarrow y(t) = t \operatorname{sen} t$$

crescente com t

Um par simples de polos complexos conjugados

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \rightarrow y(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$$

$$p = -1 \pm j$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+4)^2+2^2} \rightarrow y(t) = e^{-4t}\,\mathrm{sen}\,2t$$

$$p = -4 \pm j2$$

y

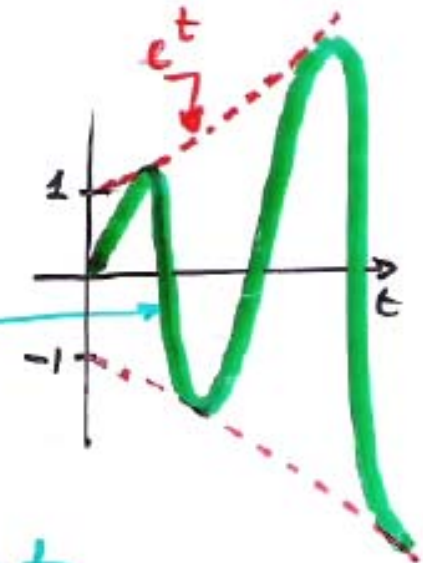
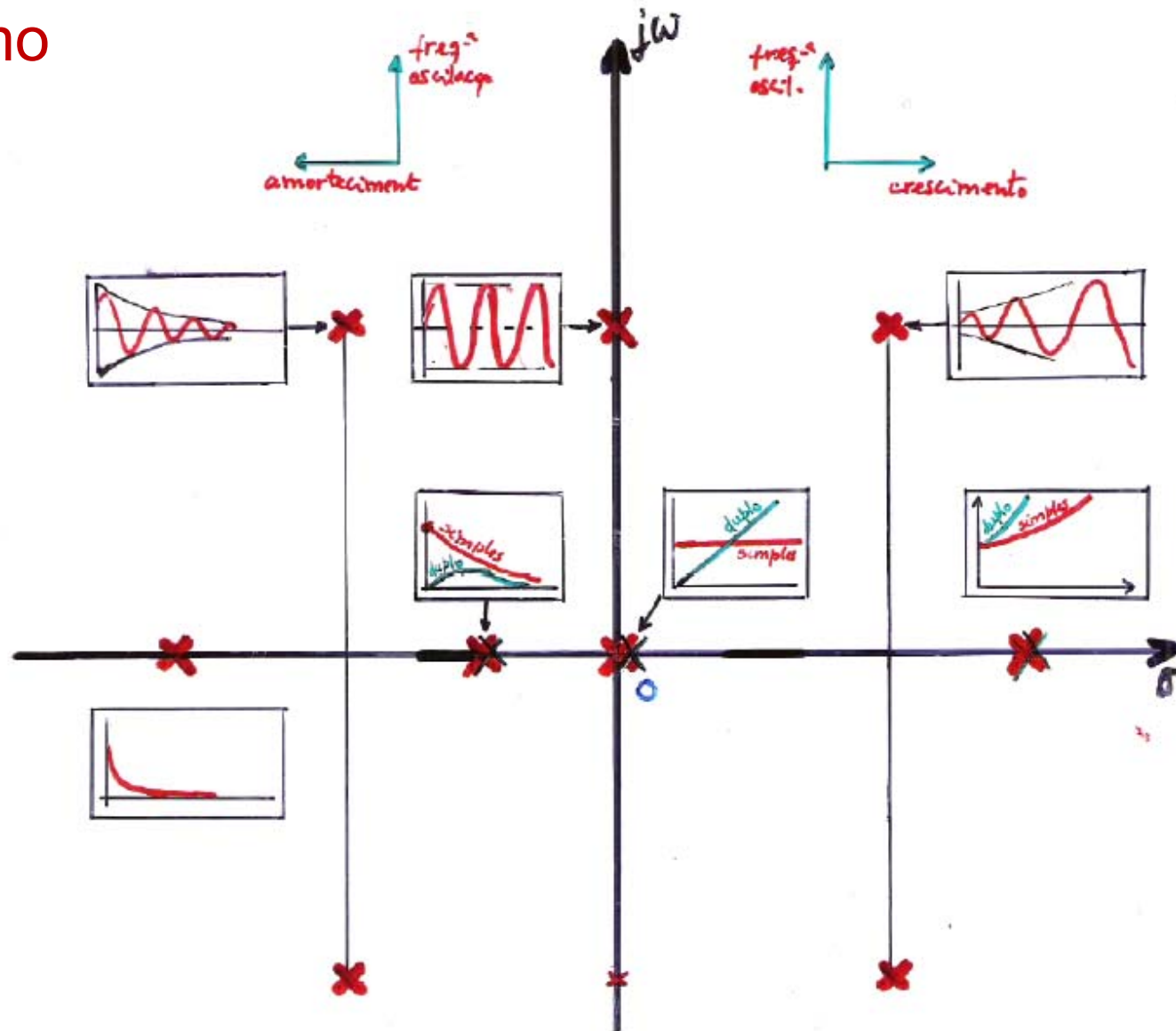
e^{-4t}

e^{-t}

$e^{-t}\mathrm{sen}\,t$

t

$e^{-4t}\mathrm{sen}\,2t$

Um par simples de polos complexos conjugados

Resumo

Os zeros da função de transferência

$$Y(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

$$Y(s) = \frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}\left[(\alpha-a)e^{-at} - (\alpha-b)e^{-bt}\right]$$

o zero altera os coeficientes das exponenciais

Conclusão

$y(t)$ é uma combinação linear de exponenciais

- os **polos** definem a **forma** das exponenciais
  (acção **qualitativa**)
- os **zeros** definem os coeficientes dessa combinação linear.
  (acção **quantitativa**)

3.9. RESPOSTA TEMPORAL DE SISTEMAS LINEARES

Sistemas de 1ª ordem

Sistemas de 2ª ordem

Sistemas de ordem superior

(Nota: pressuporemos que são todos estáveis)

Sistemas de 1ª ordem com entrada em degrau

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

(a>0)

$$y(t) = \frac{K}{a} - \frac{K}{a} e^{-at} = \frac{K}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

Plano s

$j\omega$

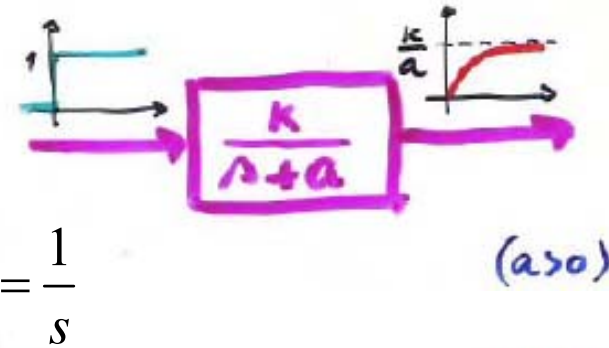
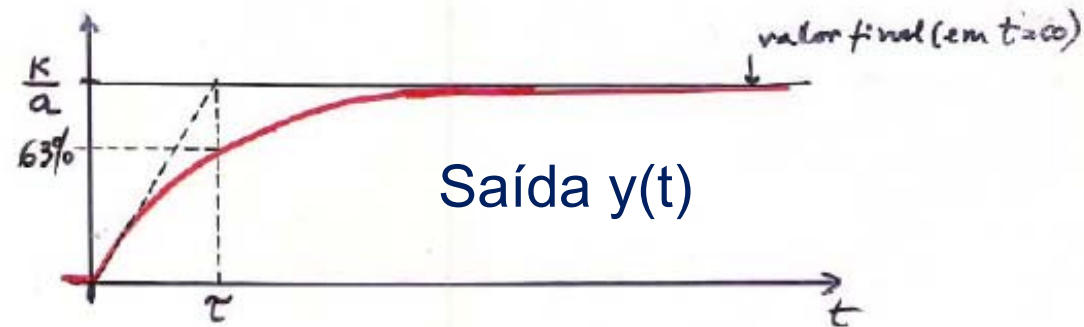
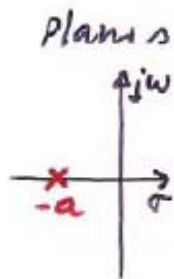
$-a$

σ

$\frac{K}{a}$

63%

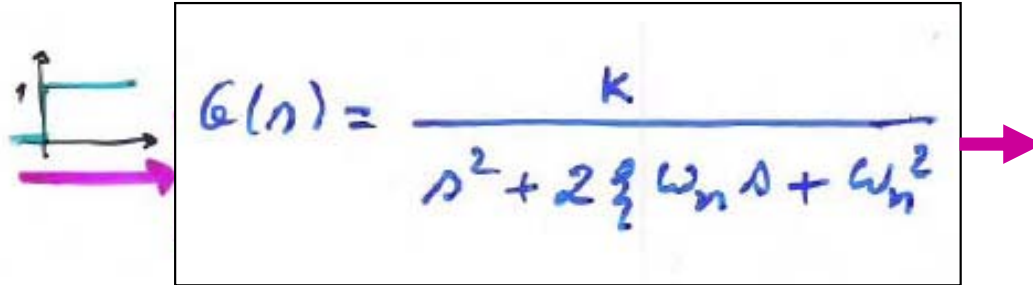
τ

t

valor final (em $t=\infty$)

Saída y(t)

características

- ganho $\frac{K}{a}$
- constante de tempo $\tau = \frac{1}{a}$

Sistemas de 2ª ordem com entrada em degrau

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Saída y(t) ??

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

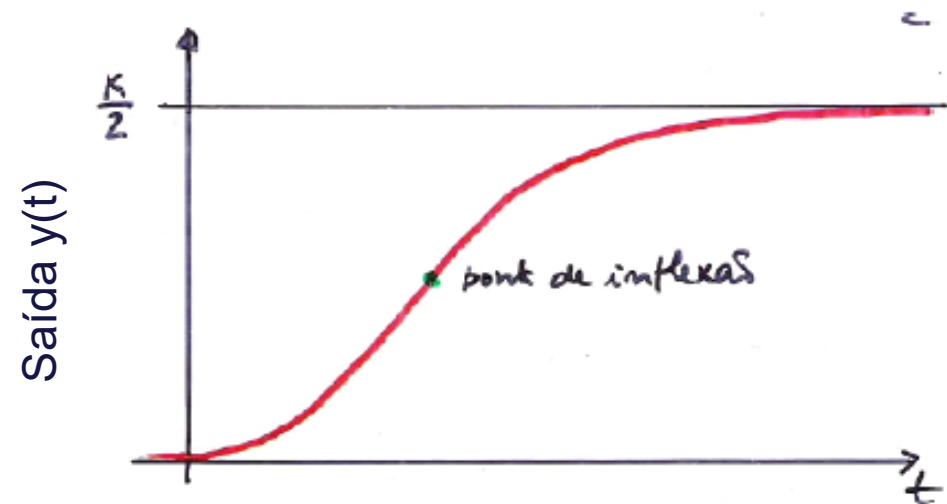
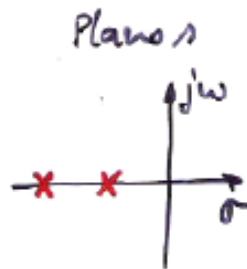
- $\xi > 1 \rightarrow$ 2 polos reais simples
- $\xi = 1 \rightarrow$ 1 polo real duplo
- $0 < \xi < 1 \rightarrow$ 2 polos complexos conjugados
  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Saída y(t)

i) $\xi > 1$, 2 polos reais distintos

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2+3s+2}$$

$$= \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

características

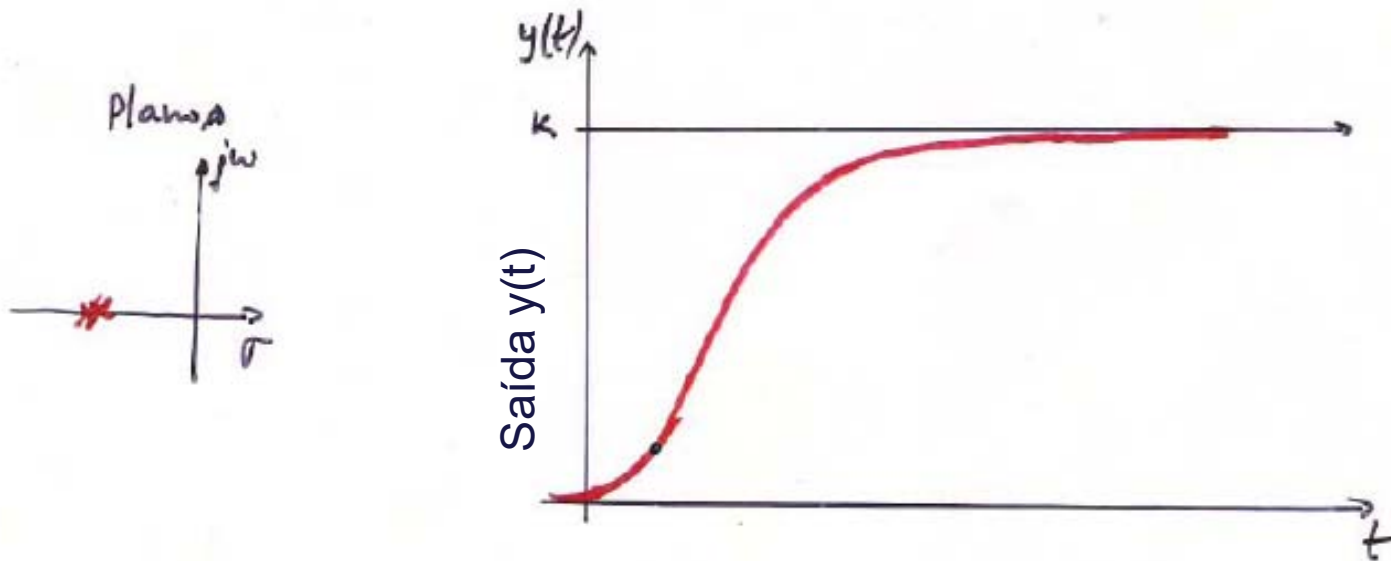
- ganho $K/2$
- velocidade de subida e forma da curva (dependem de ξ e ω_n).

ii) $\xi = 1$, um polo real duplo

Exemplo

$$G(s) = \frac{K}{s^2+2s+1} = \frac{K}{(s+1)^2}$$

$\omega_n = 1$
$\xi = 1$

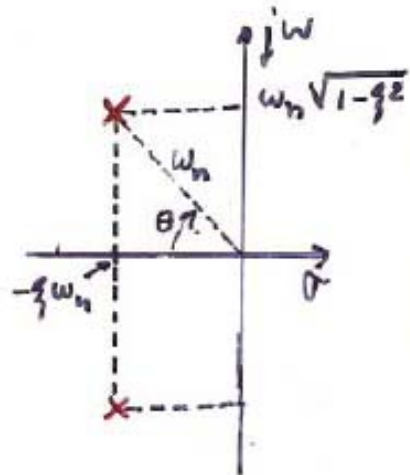
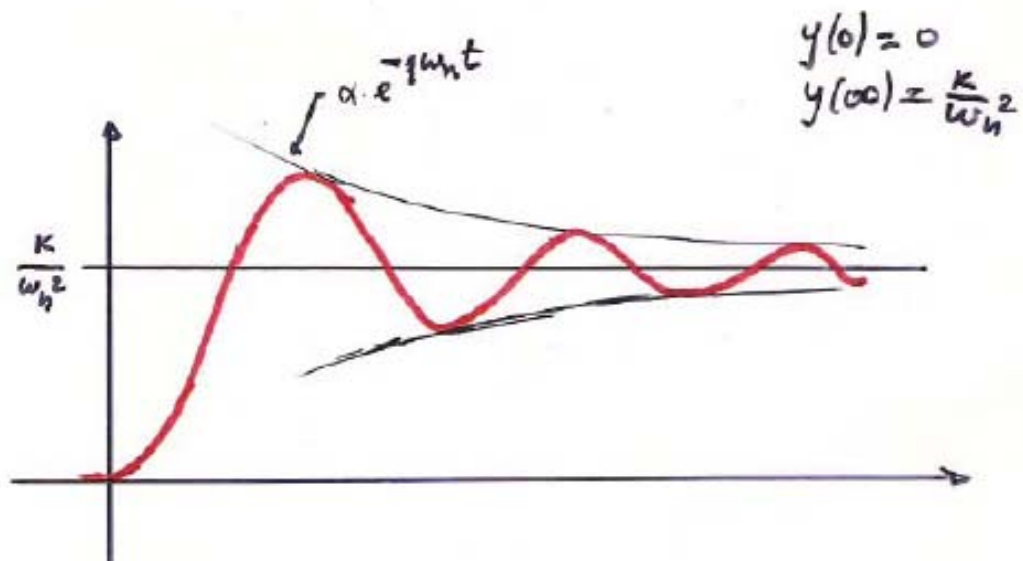
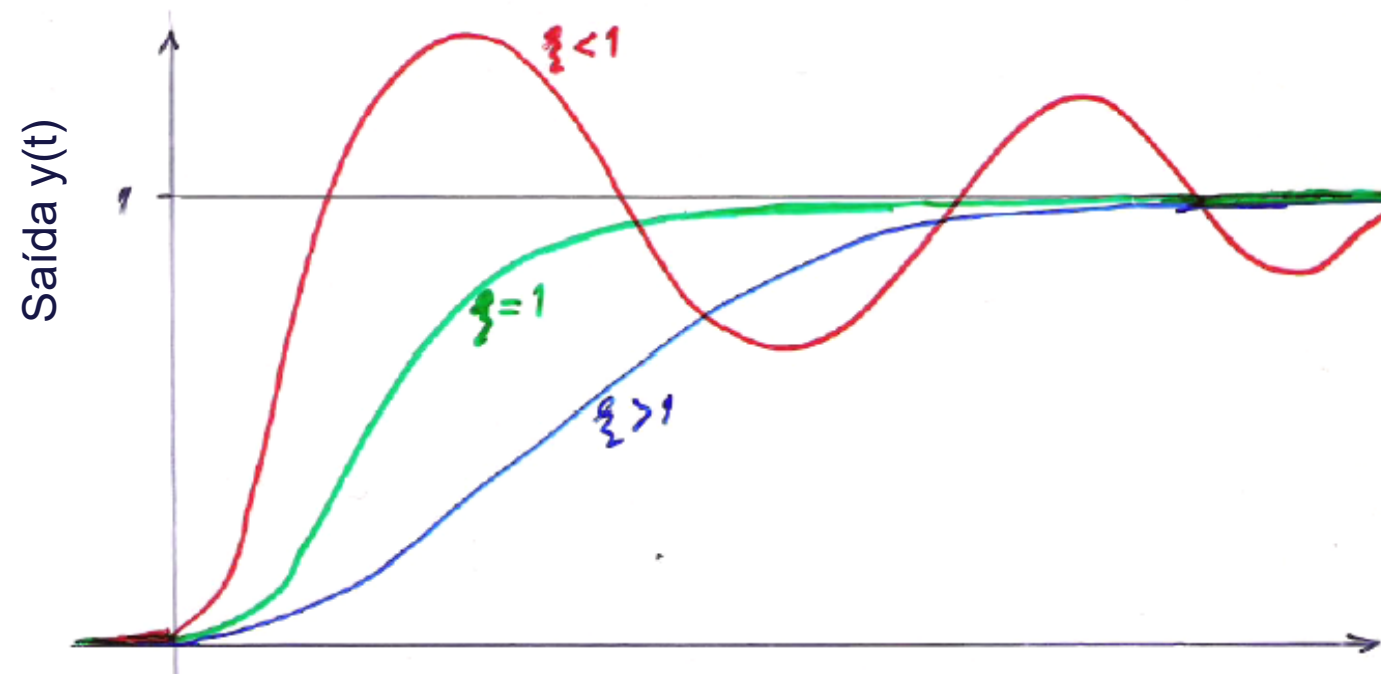
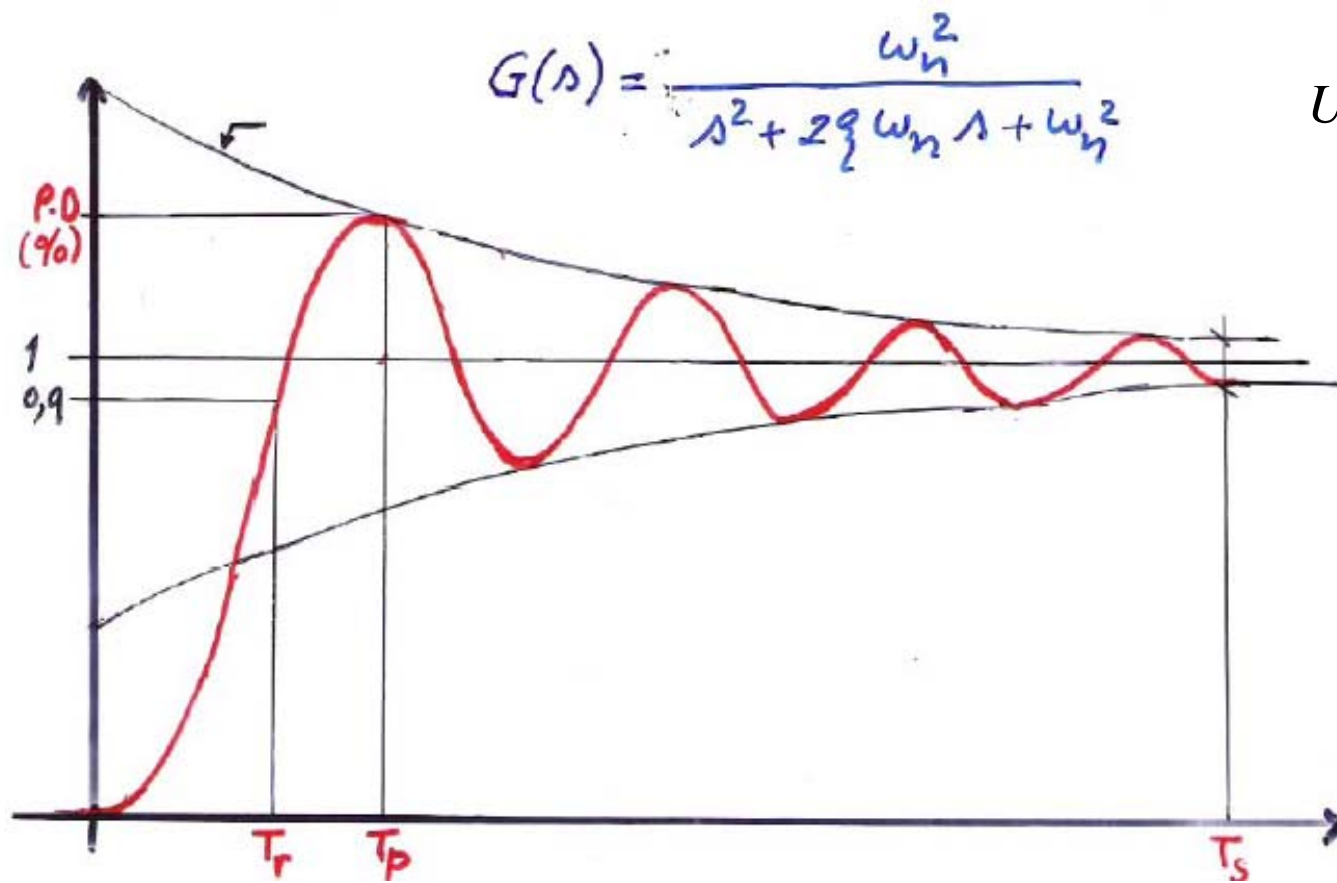
$$U(s) = \frac{1}{s}$$

características
- ganho K.
- forma da curva, depende de ω_n.

iii) $0 < \xi < 1$, 2 polos complexos conjugados

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} - \frac{K}{\omega_n^2\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cdot \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \theta\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\xi$$

$U(s)=\frac{1}{s}$
$j\omega$
$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
ω_n
θ
$-\xi\omega_n$
σ
$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
$|p_{1,2}| = \omega_n$
$y(0) = 0$
$y(\infty) = \frac{K}{\omega_n^2}$
$\alpha \cdot e^{-\xi\omega_n t}$
$\frac{K}{\omega_n^2}$
Saída y(t)

$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
$U(s) = \frac{1}{s}$
Saída y(t)
1
$\xi < 1$
$\xi = 1$
$\xi > 1$
$0 < \xi < 1$: resposta sub-amortecida
$\xi = 1$: resposta com amortecimento crítico
$\xi > 1$: resposta sobre-amortecida

$\tau = 1/(\xi\omega_n)$ constante de tempo

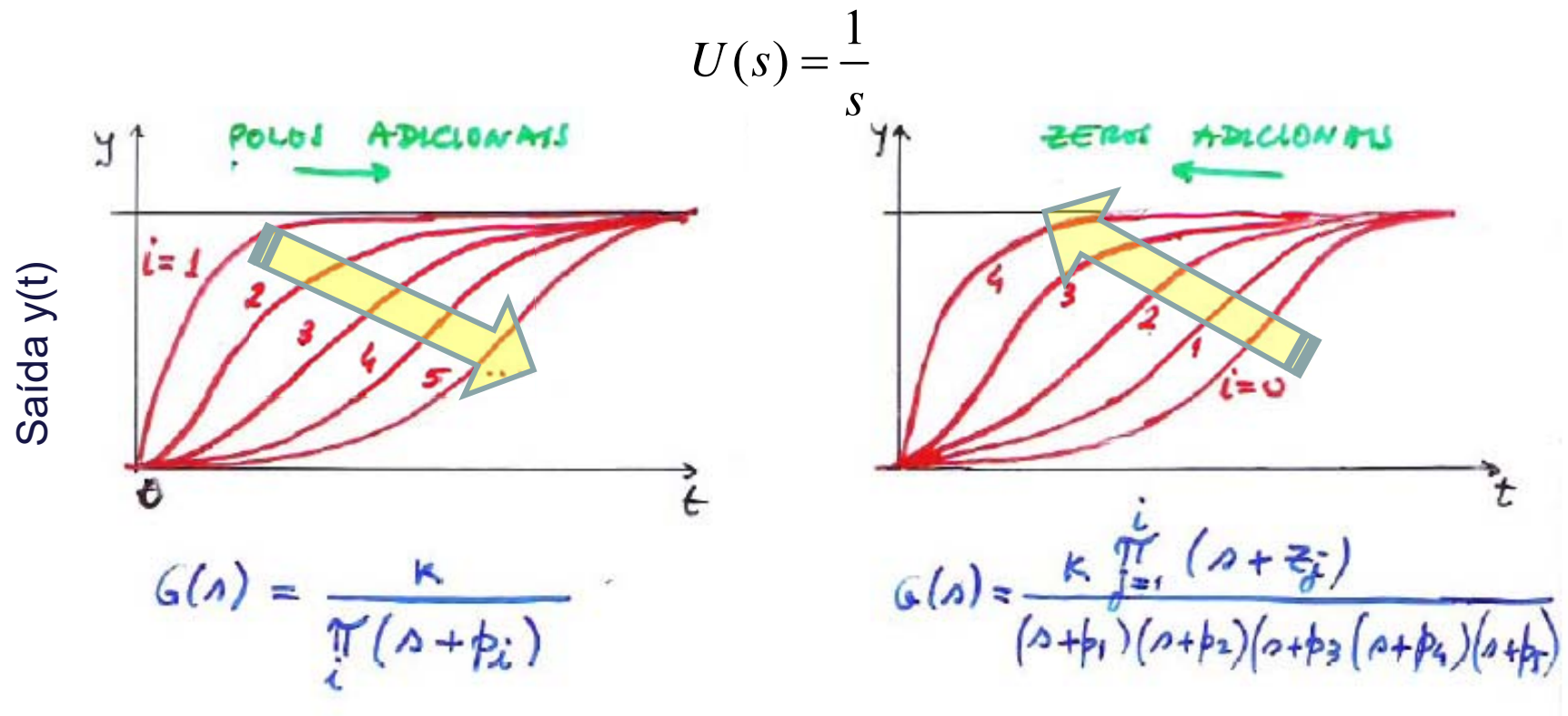
$T_r = \frac{2}{\omega_n}$ seg. tempo de subida

$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ tempo de pico

$P.O = 100\exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ sobre-elevação, em %

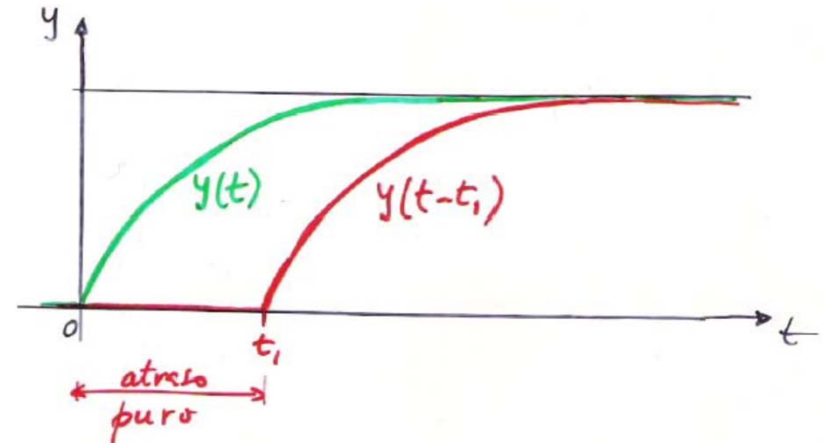
$T_s = 3\tau$ (5%) tempo de estabelec

4τ (2%)

Sistemas de ordem superior com entrada em degrau

(Nota: sistemas estáveis)

Sistemas de fase não-mínima (pag. 125)

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

Sistemas com atraso puro (126)

Álgebra de blocos (132)

Bibliografia

Baura, G. D., *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals*, , John Wiley and Sons, 2002

Bruce, Eugene N., *Biomedical Signal Processing and Signal Modelling,* John Wiley and Sons, 2001.

D'Azzo, John J. and Constantine H. Houpis Linear Control System Analysis and Design with Matlab, 5th Ed. Marcel Dekker 2003.

Carvalho, M., *Sistemas de Controlo Automático*, LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

Chen, T. *Systems and Signals Analysis*, 2nd Ed, Sunders College Publ, 1994

Hoppensteadt, F.C. and Charles S. Peskin,, *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences* , Springer Verlag, 2000

Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares*, IST Press 2002.

Capítulo 4

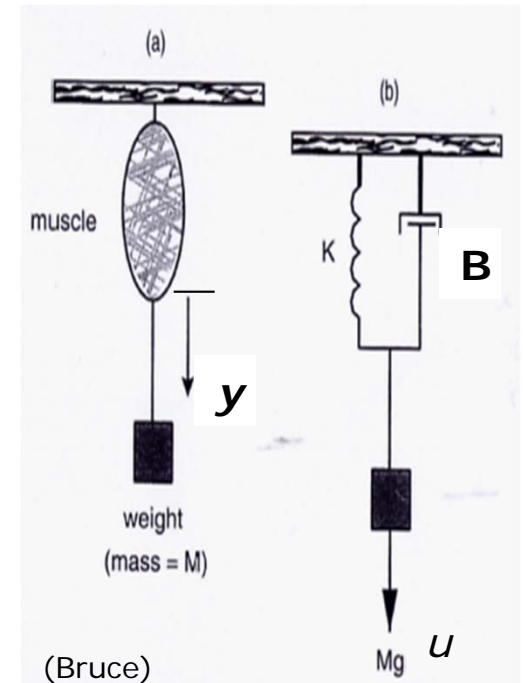
ESPAÇO DE ESTADOS

Exemplo 1

No modelo do músculo da rã suspenso (Cap. 3) obteve-se a equação diferencial de 2ª ordem

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$$

Pode-se reduzir a duas de 1ª ordem, por substituição de variáveis:

$$x_1 \triangleq y \qquad x_2 \triangleq \dot{y}$$

$$x_1 \triangleq y \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$x_2 \triangleq \dot{y} \Rightarrow \dot{x}_2 = (\dot{\dot{y}}) = \ddot{y} = -\frac{B}{M}\dot{y} - \frac{K}{M}y + \frac{1}{M}u$$

ou seja $\quad \dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

O que queremos observar ?

A posição *y* ?

Neste caso a saída é *y* e portanto

$$y = x_1 = 1x_1 + 0x_2 + 0u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx + Du$$

$$y = Cx + Du$$

Exemplo 2

No modelo de inspiração-expiração pulmonar

$$\dot{V}_L(t) + aV_L(t) = bP(t)$$

$$x \triangleq V \qquad u \triangleq P(t)$$

$$\dot{x} = -ax + bu$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

O que queremos observar ?

V ? Nesse caso *x* é a saída

$$y = x$$

$$y = x + 0u$$

$$y = Cx + Du$$

Exemplo 3 Metabolismo da glucose

$$\frac{dg}{dt} = -m_1 g - m_2 h + J(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = -m_3 h + m_4 g + K(t)$$

g : desvio do nível da glucose do seu valor recomendado

h : desvio do nível da insulina do seu valor recomendado

J : taxa experimental de infusão de glucose

K : taxa experimental de infusão de insulina

m_1, m_2, m_3, m_4, constantes características de cada indivíduo.

Estados: $x_1 \triangleq g \qquad x_2 \triangleq h$

Entradas: $u_1 \triangleq J(t) \qquad u_2 \triangleq K(t)$

Saídas: $y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_2$

$$\frac{dx_1}{dt} = -m_1 x_1 - m_2 x_2 + u_1 \qquad y_1 = x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = +m_4 x_1 - m_3 x_2 + u_2 \qquad y_2 = x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du$$

Exemplo 4 No modelo de Lotka-Volterra

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t)$$

$$x_1 \triangleq x(\text{presas}) \quad x_2 \triangleq y(\text{predadores})$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -cx_2(t) + px_1(t)x_2(t)$$

$$\dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2 \qquad \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -cx_1 + px_1x_2 \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

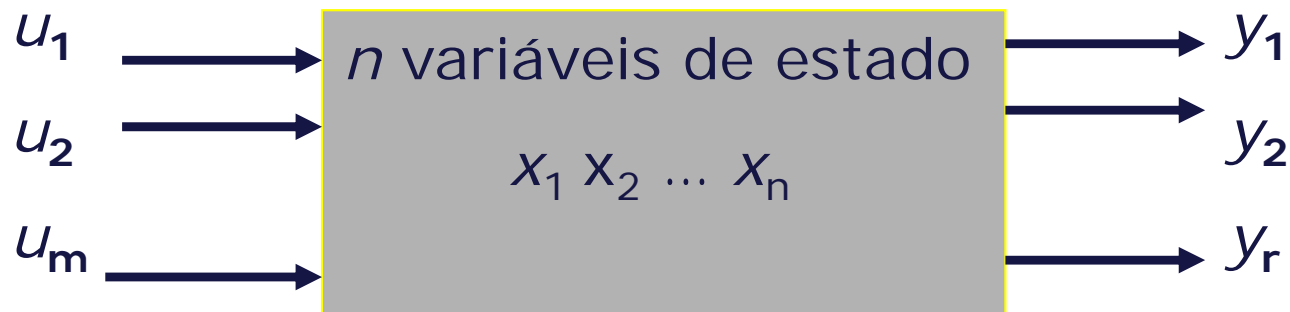
$$\dot{x} = f(x)$$

Sistema não linear autónomo (sem entrada exógena)

Caso geral

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1(t),\ \ldots\ ,\ x_n(t),\ u_1(t),\ \ldots\ ,\ u_m(t),\ t)$$

$$y_i\ (t)\ =\ g_i\ (x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_m(t),\ t)$$

u_1 u_2 u_m → *n* variáveis de estado $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$ → y_1 y_2 y_r

$$\dot{x}\ =\ f(x,u,t), \qquad x(t_0)\ =\ x0$$

$$y\ =\ g(x,u,t)$$

Caso de sistema invariante: o *t* não aparece explicitamente

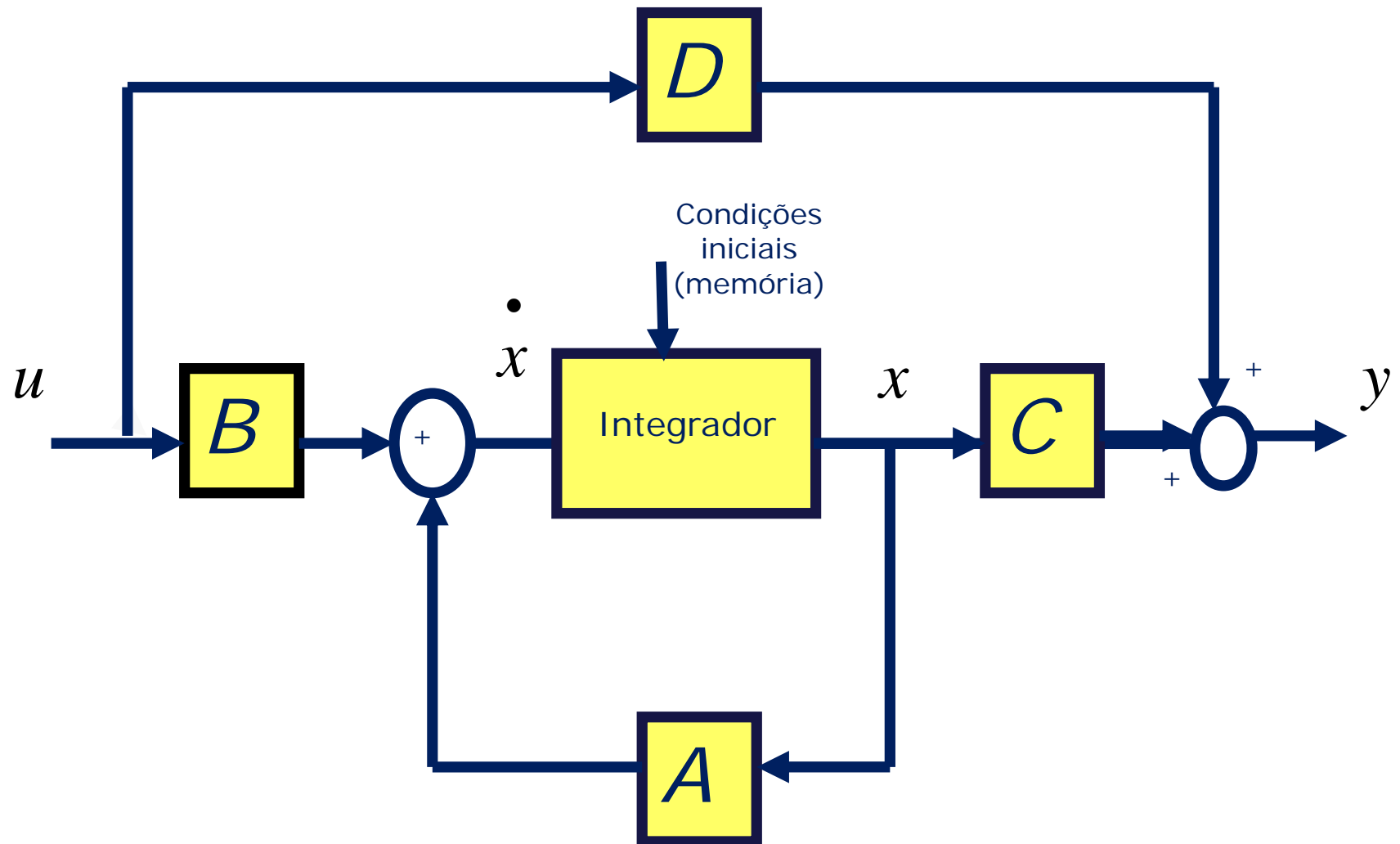
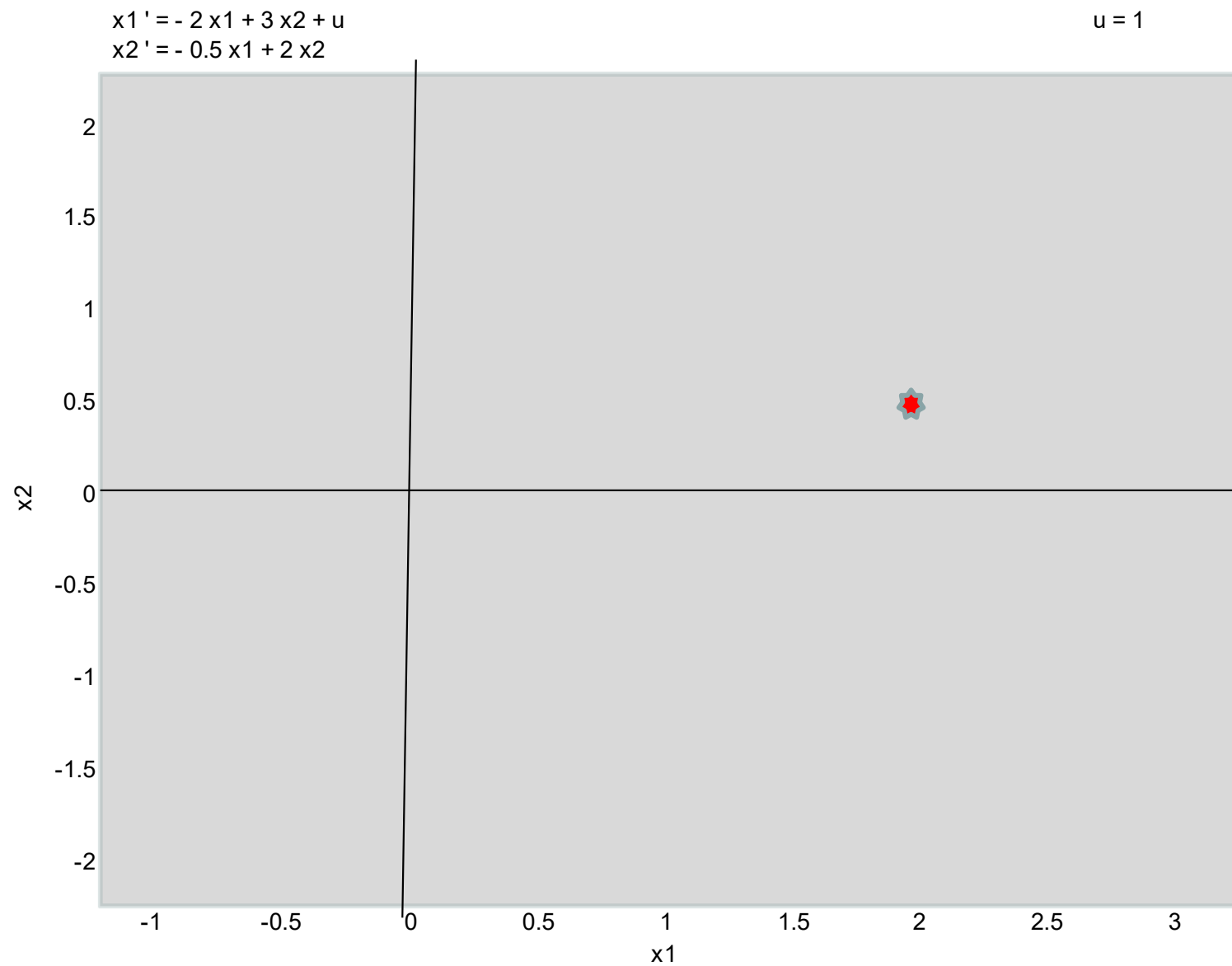
Equação de estado $\dot{x} = f(x,u,t), \qquad x(t_0) = x0$

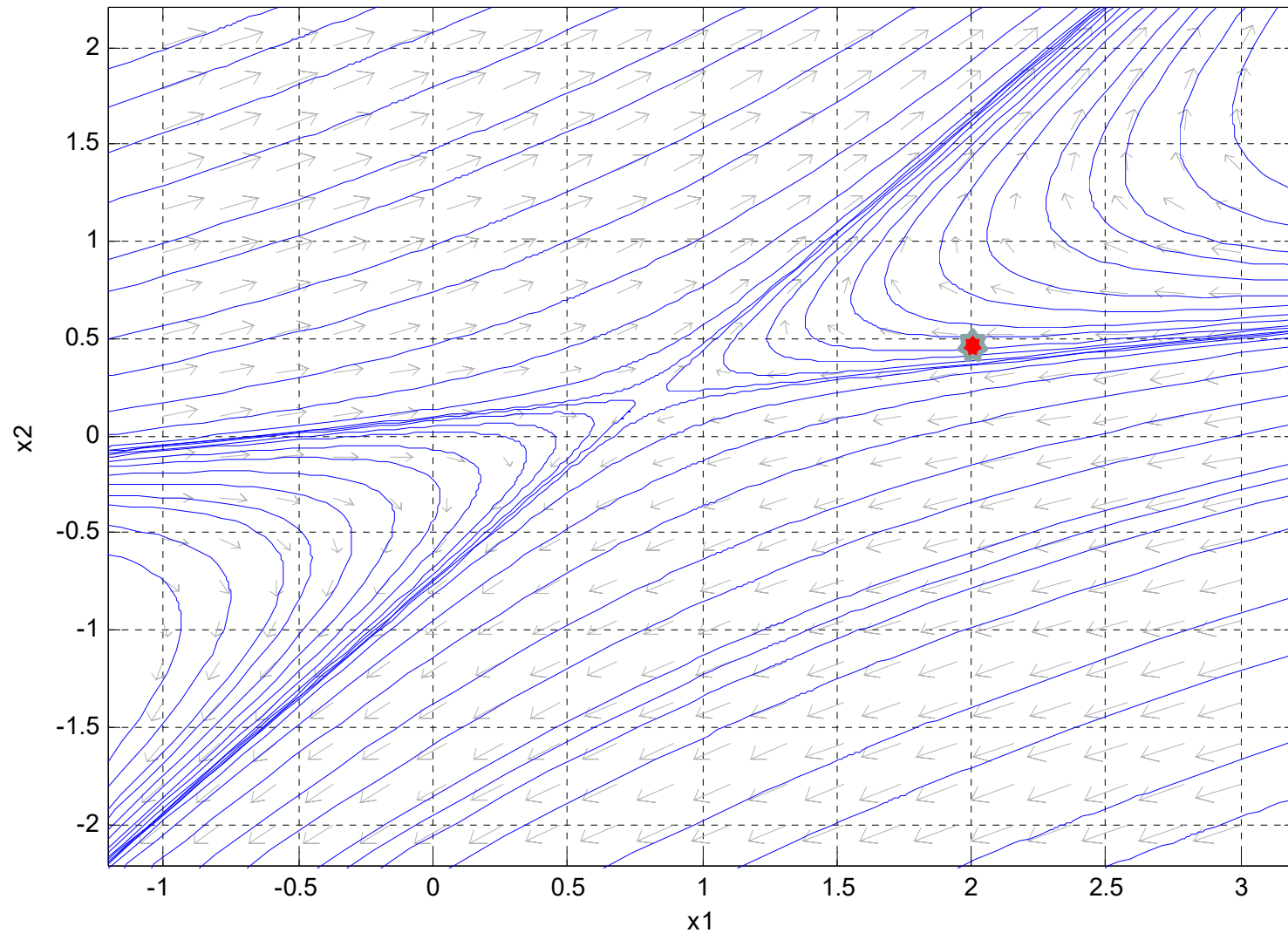
Caso linear invariante $\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x0$

Equação de saída $y = g(x,u)$

Caso linear $y = Cx + Du$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x0$$

$$y = Cx + Du$$

Plano de fase e curvas de fase

Plano de fase e curvas de fase

traçado com o pplane.jar disponível em https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/

Resolução da equação de estado

-pela transformada de Laplace

- $\dot{x} = Ax + Bu \qquad \mathcal{L}[\dot{x}] = A\,\mathcal{L}[x] + B\,\mathcal{L}[u]$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

- $y = Cx + Du \qquad \mathcal{L}[y] = C\,\mathcal{L}[x] + D\,\mathcal{L}[u]$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$s X(s) - x(0) = A X(s) + B U(s)$$

$$s X(s) - A X(s) = x_0 + B U(s)$$

$$s I X(s) - A X(s) = x_0 + B U(s)$$

$$[sI - A] X(s) = x_0 + B U(s)$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x_0 + [sI - A]^{-1} B U(s)$$

X_{zi} : trajectória de entrada nula

X_{zs} : trajectória de estado inicial nulo.

$$Y(s) = C X(s) + D U(s)$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} x_0 + C[sI - A]^{-1} B U(s) + D U(s)$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} x_0 + [C[sI - A]^{-1} B + D] U(s)$$

Y_{zi}: resposta com entrada nula

Y_{zs}: resposta com condição inicial nula.

$$Y(s) = \left[C\,[sI-A]^{-1} B + D \right] U(s)$$

Por outro lado, sabemos que

$$Y(s) = G(s)\, U(s)$$

donde,

$$G(s) = C\,[sI-A]^{-1} B + D$$

!!! pode-se calcular a função de transferência da equação de estado (e de saída).

Resolução da equação de estado no domínio temporal

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x0$$

Parte homogénea $\quad \dot{x} = Ax, \; x(0) = x_0$

Exemplo

$$\dot{x} = ax, \; x(0) = x_0 \quad \text{(uma variável de estado)}$$

$$x(t) = e^{at}.x_0$$

de facto,

$$\dot{x} = x_0 a e^{at} = a(x_0 e^{at}) = ax$$

... e se *A* for uma matriz ?

$$\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0 \quad (n \text{ variáveis de estado})$$

$$x(t) = e^{At}.x_0 \qquad\qquad ????$$

$$e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + a^3\frac{t^3}{3!} + \ldots + a^k\frac{t^k}{k!} + \ldots$$

$$e^{At} = 1 + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \ldots + A^k\frac{t^k}{k!} + \ldots$$

Matriz de transição de estado, $\Phi(t)$

$$x(t) = \Phi(t)x_0$$

Conhecida a condição inicial, para calcular o estado em qualquer instante futuro basta multiplicar o estado inicial pela matriz de transição de estado nesse instante; isto é, esta matriz transita o estado inicial no instante 0 para o instante *t*, e daí o seu nome.

No caso linear invariante (coeficientes constantes)

$$x(t) = e^{At}.x_0$$

$$\Phi(t) = e^{At}$$

Polinómio característico da matriz A

$$\left|\lambda I - A\right| = 0$$

$$Q(\lambda) = \lambda^{n} + a_{n\text{-}1}\lambda^{n\text{-}1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Valores próprios de A: raízes da sua equação característica

Vectores próprios à direita de A: vectores *v* tais que

$$\lambda v = Av \Leftrightarrow \lambda v - Av = 0 \Leftrightarrow [\lambda I - A]v = 0$$

Vectores próprios à esquerda de A: vectores *w* tais que

$$w^T\lambda = w^T A \Leftrightarrow w^T\lambda - w^T A = 0 \Leftrightarrow w^T[\lambda I - A] = 0$$

Estrutura própria da matriz A (caso de valores próprios distintos)

Conjunto dos

Valores próprios λ_i

Vectores próprios

à direita v_i

à esquerda w_i

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i w_i^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_i$$

Matrizes Constituintes de A

A matriz A pode ser reconstruída a partir da sua estrutura própria (caso n valores próprios distintos)

Pelo Teorema das Matrizes Constituintes

$$e^{At} = \left[\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} . v_j \, w_j^T \right]$$

e portanto

$$x(t) = \left[\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} . v_j \, w_j^T \right] . x(0)$$

$$= e^{\lambda_1 t} . v_1 \, w_1^T . x(0) + e^{\lambda_c t} . v_2 \, w_2^T x(0) . + \ldots + e^{\lambda_n t} . v_n \, w_n^T . x(0)$$

Este resultado diz-nos que, para uma dada condição inicial

- a trajectória temporal do estado é uma soma ponderada de exponenciais dos valores próprios da matriz A (os termos $e^{\lambda t}$) .

- são os vectores próprios que estabelecem os coeficientes de ponderação.

Se existe um λ_i real positivo $$\lim_{t \to \infty} e^{\lambda_i t} = \infty$$

... e o sistema é instável em relação às condições iniciais!!!

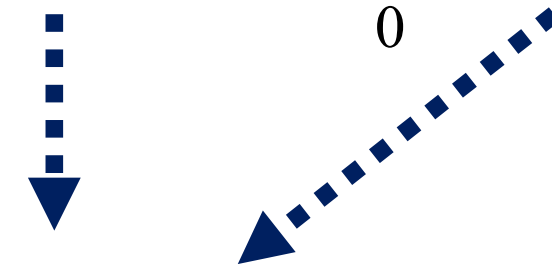
Caso de um par de valores próprios complexos conjugados:

- Se a parte real é negativa, contribui com uma sinusóide decrescente

- Se a parte real é positiva, contribui com uma sinusóide crescente.

- Se a parte real é nula, contribui com uma sinusóide de amplitude

  - constante se for simples,

  - crescente se for múltiplo.

Condição necessária e suficiente de estabilidade às condições iniciais:

- Que todos os valores próprios de A tenham parte real negativa ou nula, mas neste caso têm que ser simples (multiplicidade 1).

Solução da equação de estado completa

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = x_{zi} + x_{zs}$$

Pontos singulares de sistemas não-lineares

Para um sistema não-linear definido por

$$\dot{x} = f(x\,,\,u)$$

São pontos singulares (também chamados singularidades ou estados de equilíbrio) aqueles em que

Exemplo

traçado com o pplane.jar disponível em
https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/ 2/08/2022

Linearização em torno dos estados de equilíbrio (também chamados singularidades)

Série de Taylor

$$f_i(x_{1s}+\Delta x_1, x_{2s}+\Delta x_2, \ldots x_{ns}+\Delta x_n, u_{1s}+\Delta u_1, u_{2s}+\Delta u_2, \ldots, u_{ms}+\Delta u_m) =$$

$$f_i(x_{1s}, x_{2s}, \ldots x_{ns}, u_{1s}, u_{2s}, \ldots, u_{ms}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Delta x_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_k}\Delta u_k$$

$$+ \text{ termos de ordem superior}$$

$$g_i(x_{1s}+\Delta x_1, x_{2s}+\Delta x_2, \ldots x_{ns}+\Delta x_n, u_{1s}+\Delta u_1, u_{2s}+\Delta u_2, \ldots, u_{ms}+\Delta u_m) =$$

$$g_i(x_{1s}, x_{2s}, \ldots x_{ns}, u_{1s}, u_{2s}, \ldots, u_{ms}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}\Delta x_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial u_k}\Delta u_k$$

$$+ \text{ termos de ordem superior}$$

Definindo os Jacobianos

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_S, u_S)} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(x_S, u_S)}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_S, u_S)} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(x_S, u_S)}$$

Substituindo na série de Taylor

$$\dot{x}_s = f(x_s, u_s) \qquad y_s = g(x_s, u_s)$$

$$(\dot{x}_s + \dot{\Delta x}) = f(x_s + \Delta x, u_s + \Delta u) \qquad y_s + \Delta y = g(x_s + \Delta x, u_s + \Delta u)$$

$$\dot{x}_s + \dot{\Delta x} = f(x_s, u_s) + A\Delta x + B\Delta u \qquad y_s + \Delta y = g(x_s, u_s) + C\Delta x + D\Delta u$$

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$$

Exemplo 1

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - 2u \qquad y = x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2 (x_1 - x_2)$$

$$x_s^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_S$$

$$u_s = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & -2x_2 + x_1 \end{bmatrix}_{[1,1]} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [x_2 \quad x_1]_{[1,1]} \qquad D = [0]$$

$$x_s^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_S$$

$$u_s = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & -2x_2 + x_1 \end{bmatrix}_{[2,0]} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [x_2 \quad x_1]_{[2,0]} \qquad D = [0]$$

$$x_s^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_S$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \;\; 1] \qquad D = [0]$$

```
eig(A)

ans =

  -1.4142
   1.4142
```

$$x_s^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_S$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

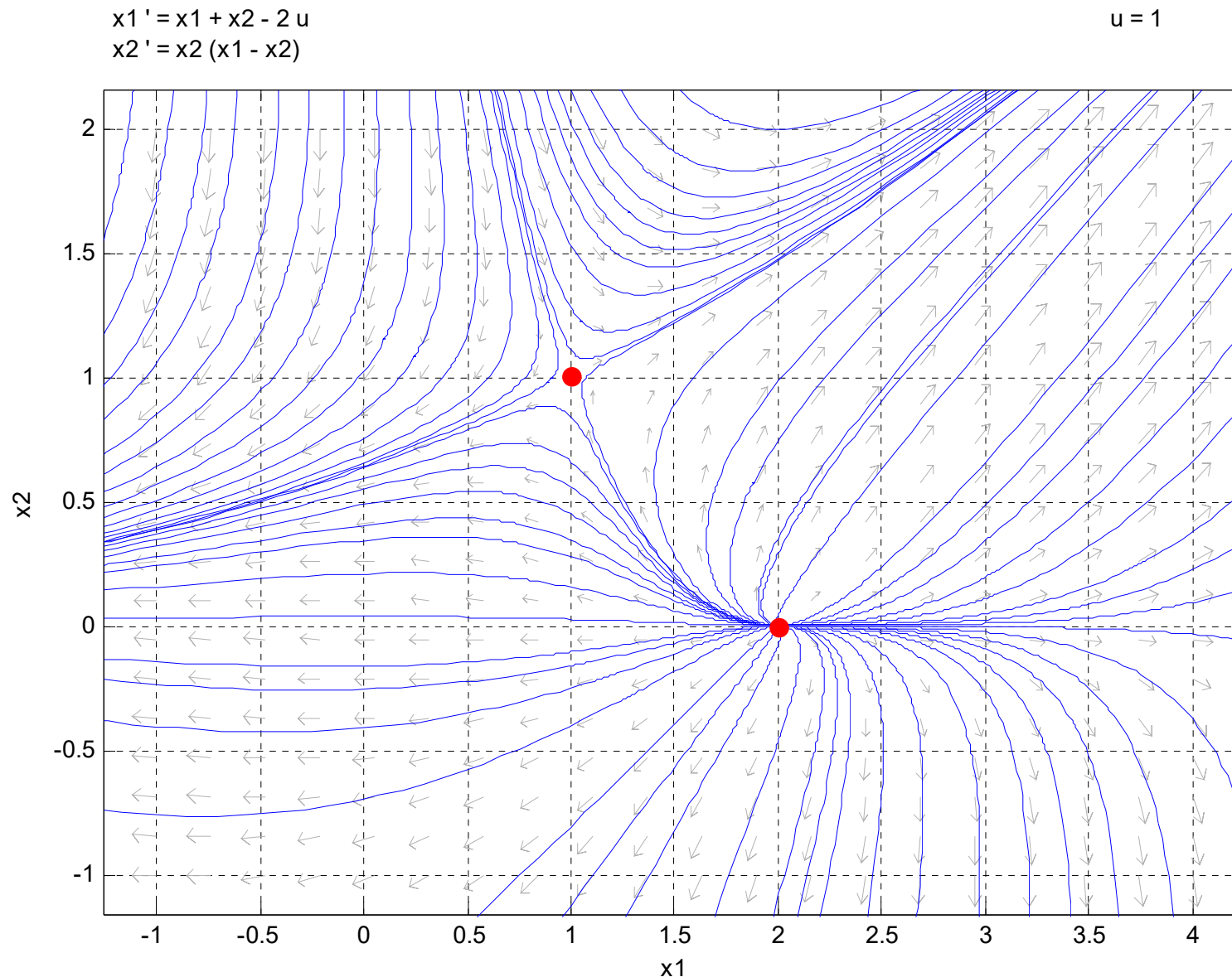
$$C = [2 \;\; 1] \qquad D = [0]$$

```
» eig(A)

ans =

     1
     2
```

As singularidades são um ponto sela e um nó instável

traçado com o pplane.jar disponível em https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/

Exemplo 2

$$\dot{x}_1 = (x_1 - 1)^2 - u \qquad y = x_2$$

$$\dot{x}_2 = (x_2 - 2)^2 - u$$

$$(x_1 - 1)^2 - u = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = u \Leftrightarrow (x_1 - 1) = \pm\sqrt{u}$$

$$(x_2 - 2)^2 - u = 0 \Leftrightarrow (x_2 - 2)^2 = u \Leftrightarrow (x_2 - 2) = \pm\sqrt{u}$$

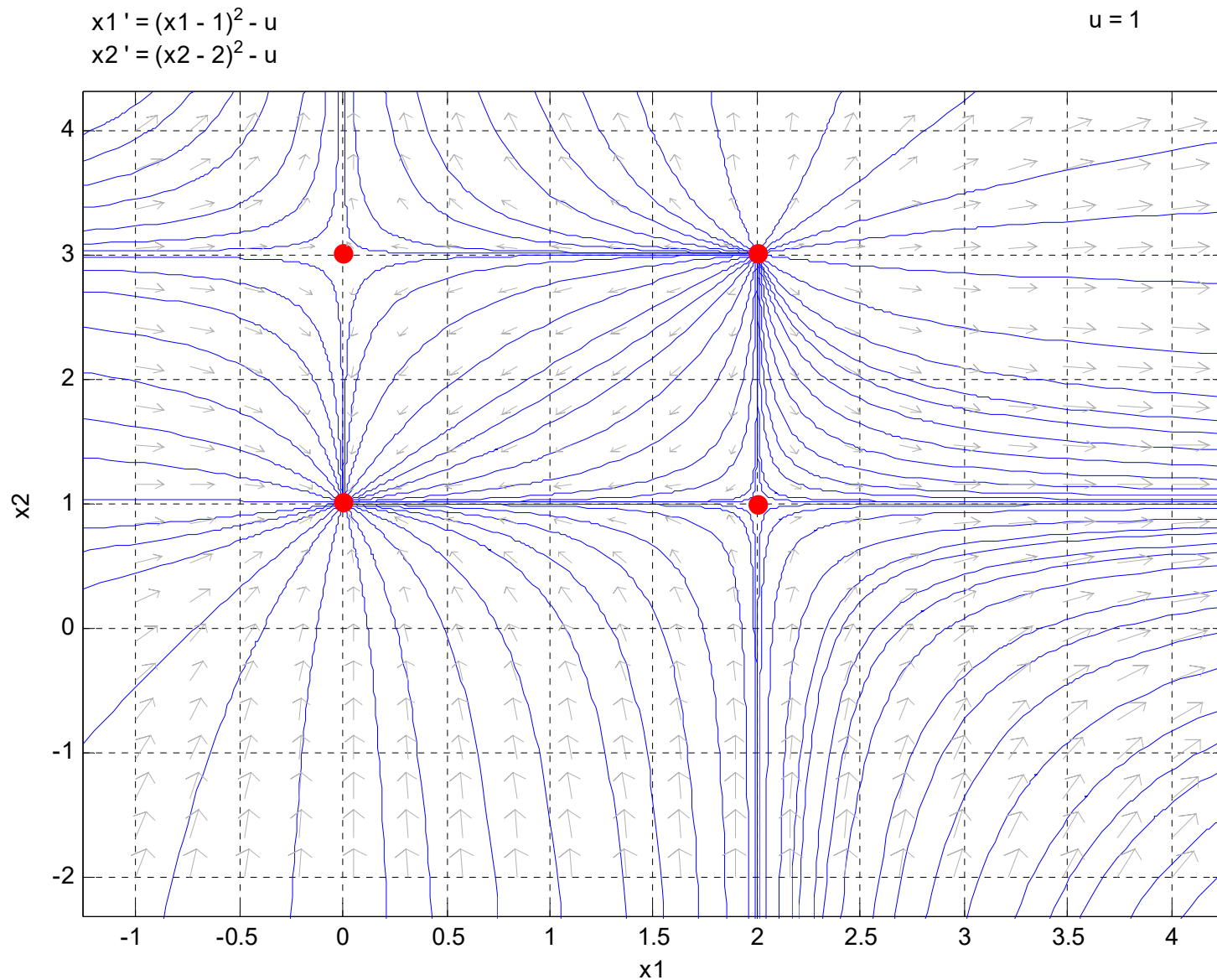
$$\Leftrightarrow (x_1 - 1) = \pm\sqrt{u} \Leftrightarrow x_{1S} = 1 \pm \sqrt{u_S}$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - 2) = \pm\sqrt{u} \Leftrightarrow x_{2S} = 2 \pm \sqrt{u_S}$$

$$x_{1S} = 1 \pm \sqrt{u_S}$$

$$u_S = 1 \qquad x_{2S} = 2 \pm \sqrt{u_S}$$

$x_S^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$x_S^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$x_S^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$x_S^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
nó instável	ponto sela	ponto sela	nó estável

traçado com o pplane.jar disponível em https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/

Conclusão

- **A representação de estado aplica-se de igual modo aos sistemas lineares e não lineares, variantes ou invariantes.**

- **No caso linear obtém-se uma representação matricial. As propriedades dinâmicas do sistema são dependentes dos valores próprios da matriz de estado, tal como são dependentes dos polos da função de transferência na representação no domínio complexo.**

- **Os sistemas não lineares podem ter zero, um ou vários estados de equilíbrio, ou singularidades, ou pontos singulares, para a mesma entrada. Alcançam um ou outro conforme as condições iniciais.**

- **Aproximando as funções de estado e de saída pela série de Taylor nos pontos singulares, desprezando os termos de ordem superior à primeira, obtém-se um sistema linearizado. A estabilidade local, em torno da singularidade, é definida pela estabilidade do sistema linearizado.**

Bibliografia

Baura, G. D., *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals*, , John Wiley and Sons, 2002

Bruce, Eugene N., *Biomedical Signal Processing and Signal Modelling,* John Wiley and Sons, 2001.

D'Azzo, John J. and Constantine H. Houpis Linear Control System Analysis and Design with Matlab, 5th Ed. Marcel Dekker 2003.

Carvalho, M., *Sistemas de Controlo Automático*, LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

Chen, T. *Systems and Signals Analysis*, 2nd Ed, Sunders College Publ, 1994

Hoppensteadt, F.C. and Charles S. Peskin,, *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences* , Springer Verlag, 2000

Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares*,., IST Press 2002

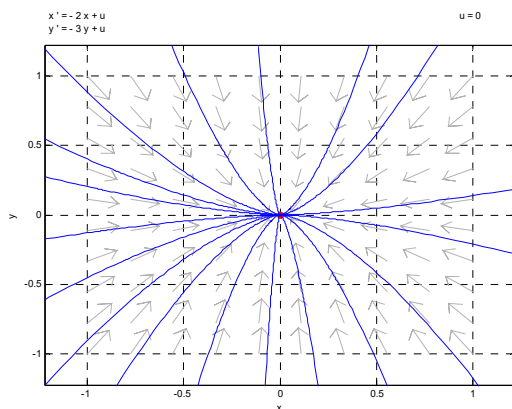
pplane is copyrighted by
John C. Polking, Department of Mathematics, Rice University.
Mais informação em : https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/ 5/08/2022

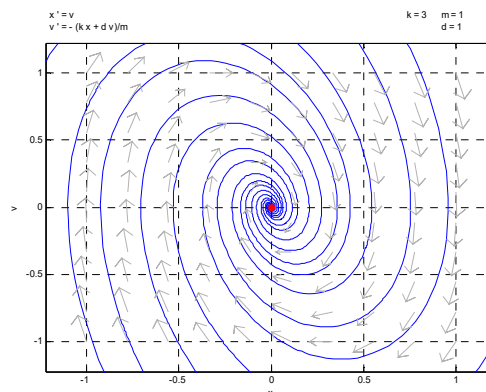
Versão atualizada para Matlab
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61636-pplane 5/08/2022

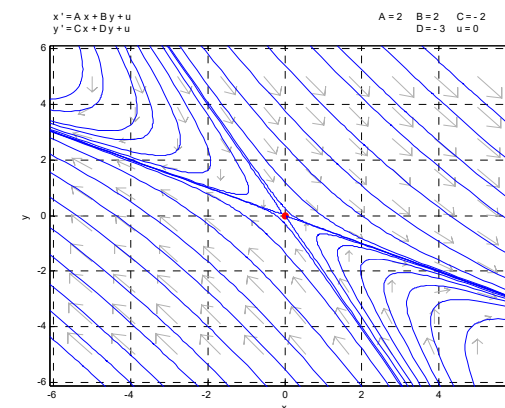
Capítulo 5

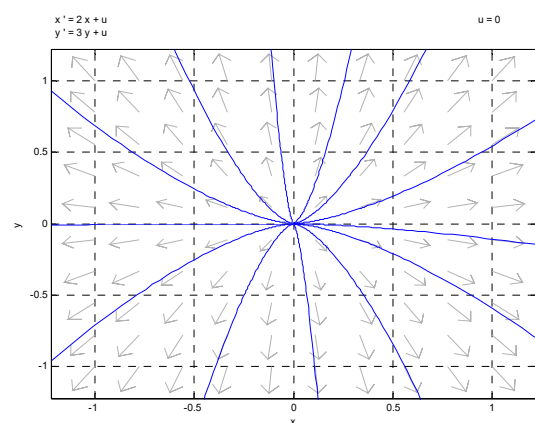
COMPORTAMENTO DOS SISTEMAS NÃO LINEARES E CAÓTICOS

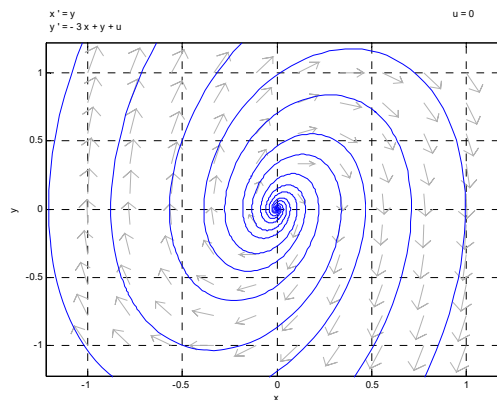
Pontos singulares (singularidades) de sistemas lineares

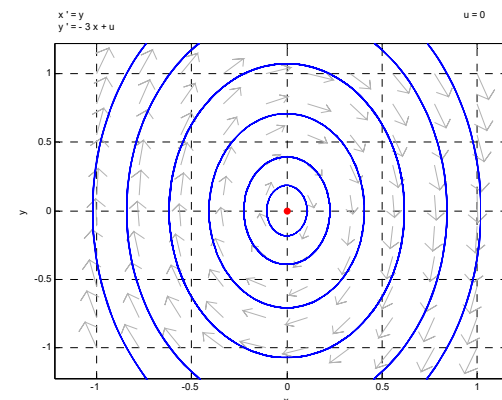
Todas as curvas de fase deste capítulo foram traçadas com o pplane.jar disponível em https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield

Nó estável (poço-*sink, attractor*):

2 val. Próp. (vp) reais negativos

Foco estável (poço-*sink, atractor*)

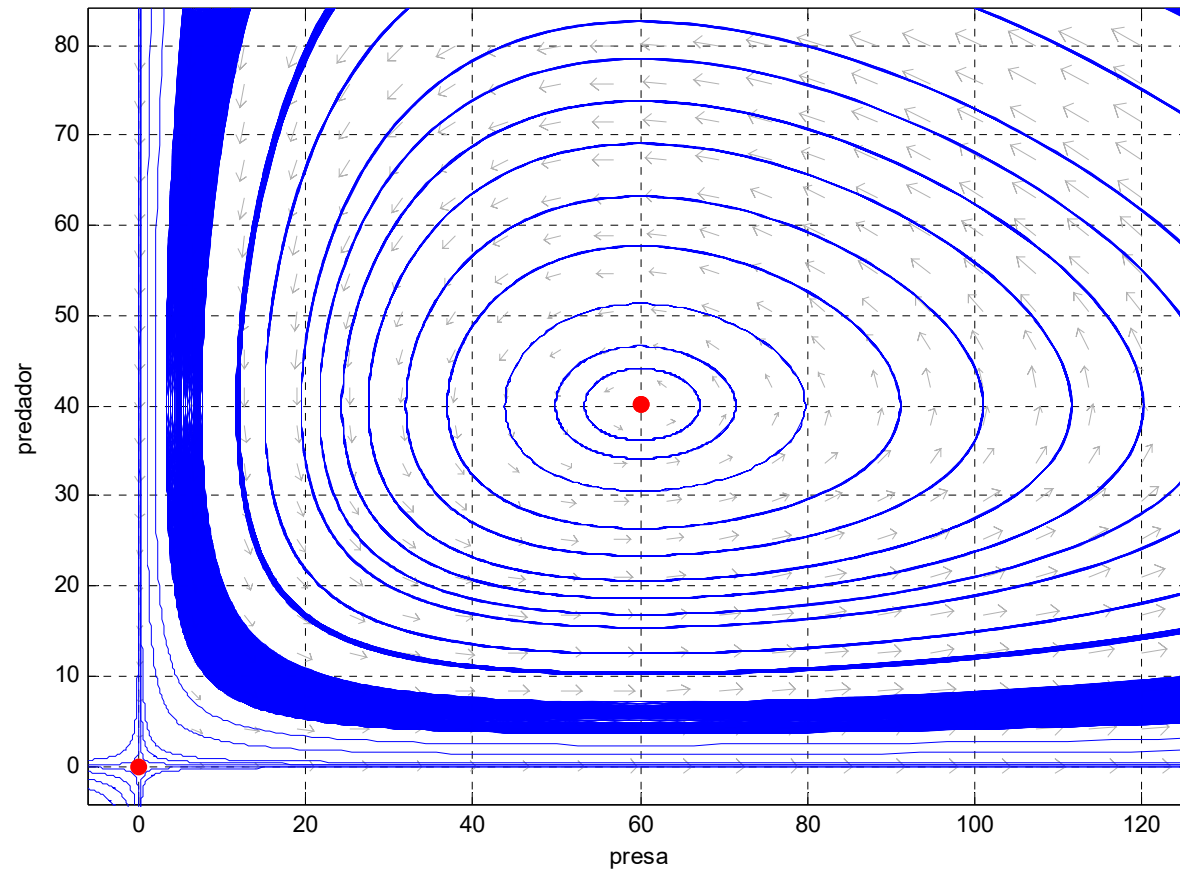
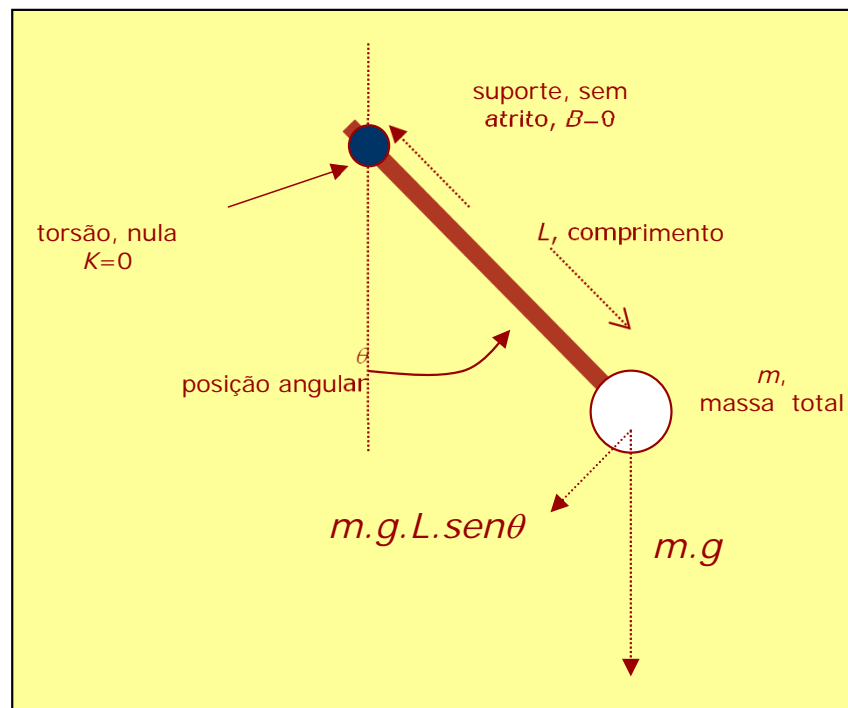
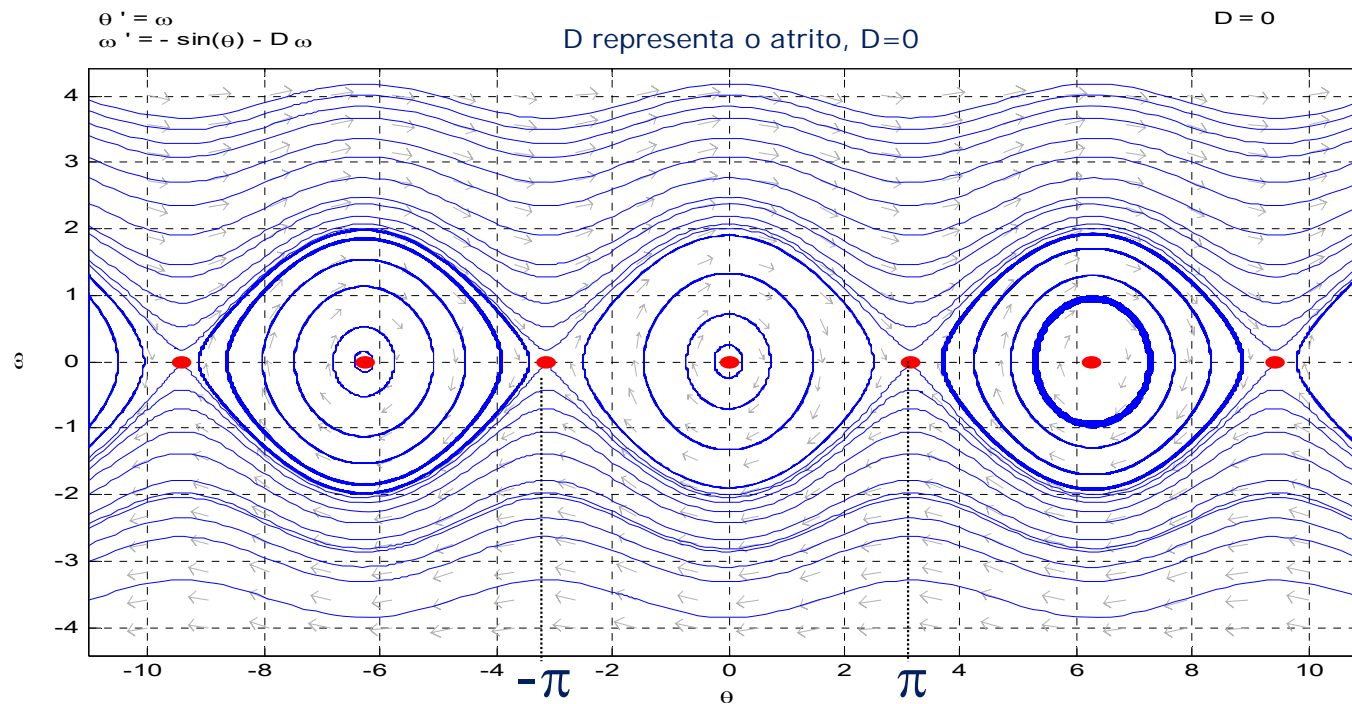
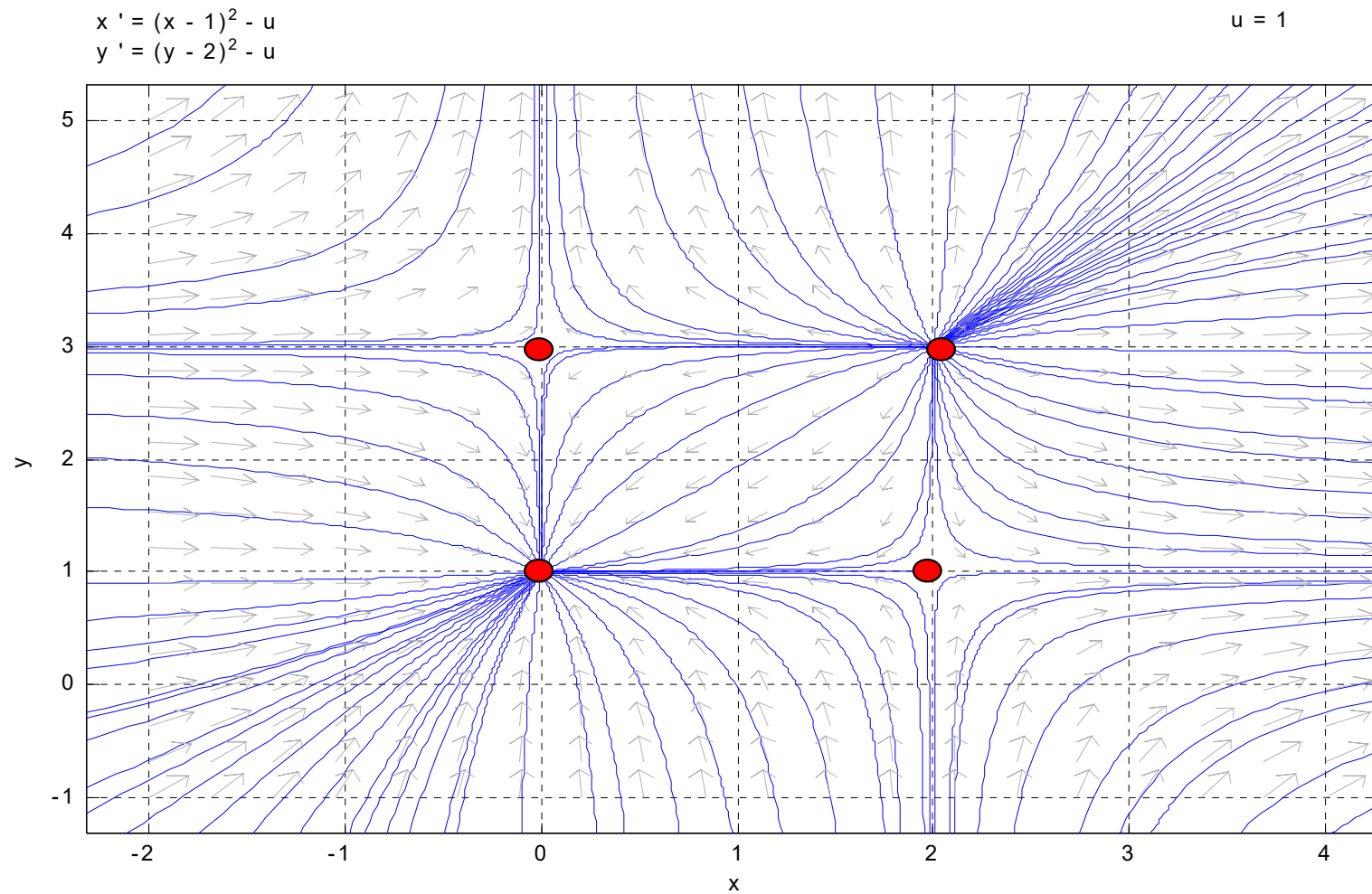
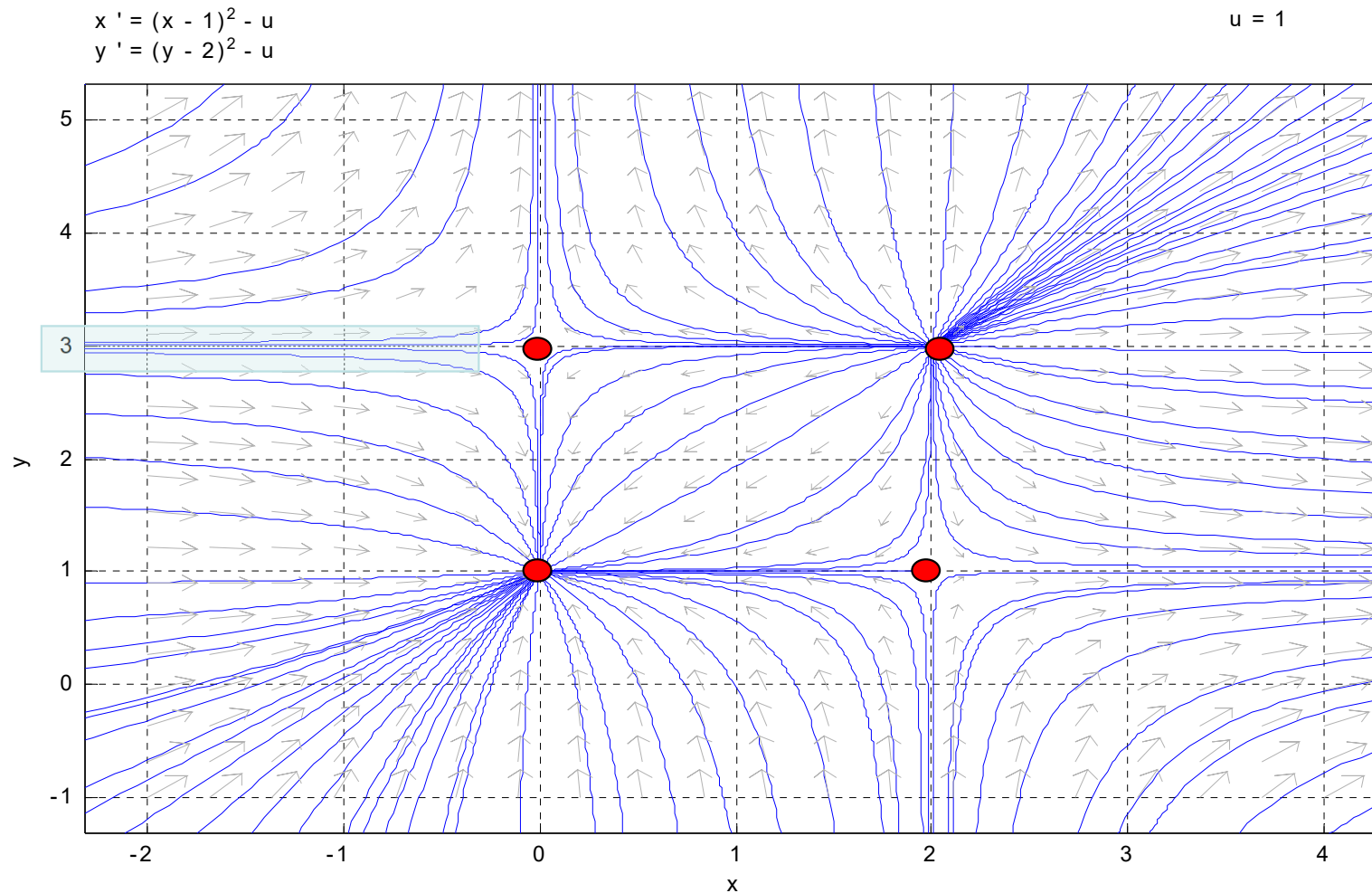
2 vp complexos conjugados
com parte real negativa

Pont sela

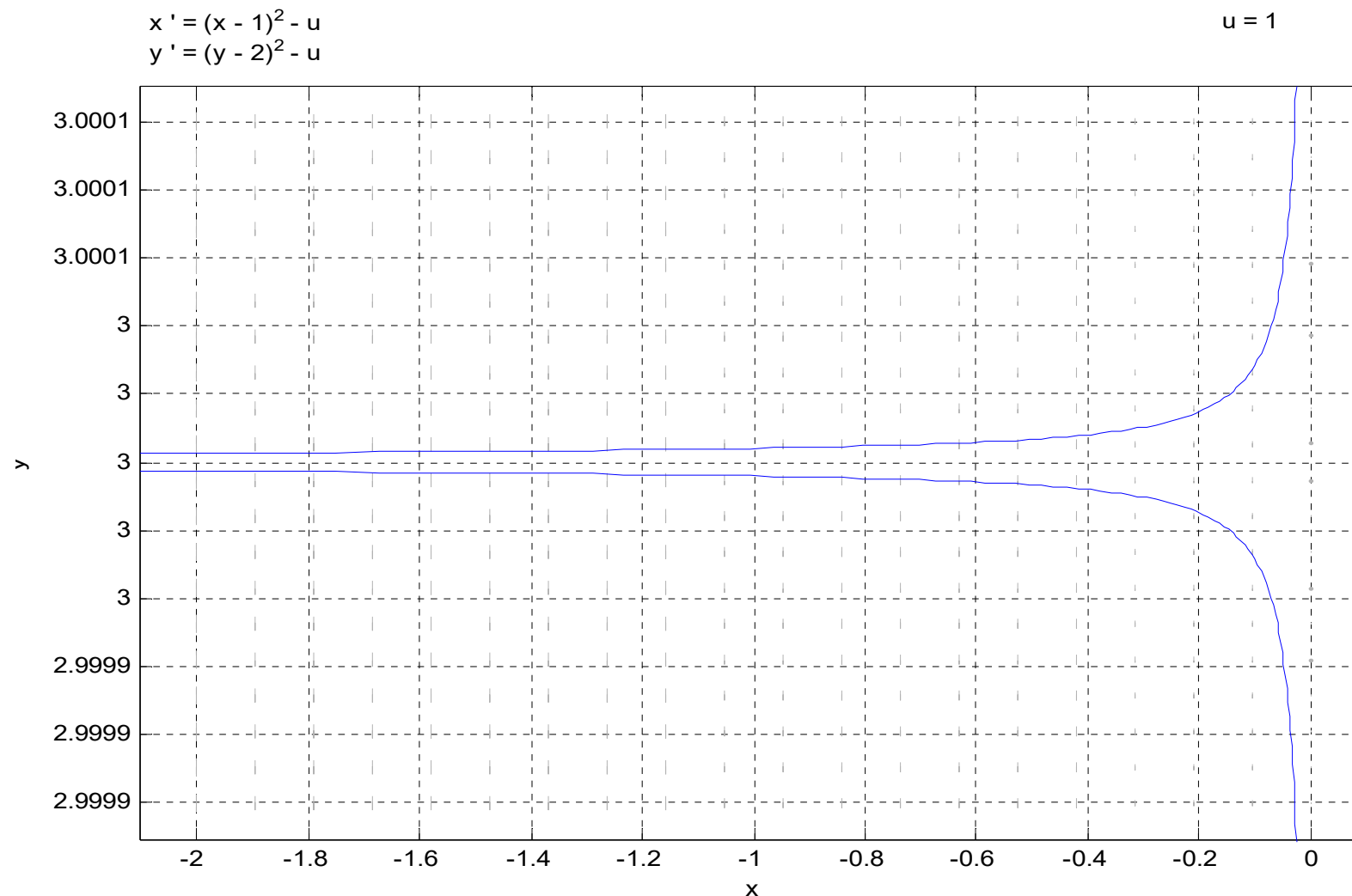
1 vp real positivo +
1 vp real negativo

Nó instável (fonte-*source, repelling*)

2 vp reais positivos

Foco instável (fonte-*source, repelling*):

2 vp complexos conjugados
com parte real positiva

Um centro

2 vp imaginários conjugados

Modelo de Lotka-Volterra

Pêndulo rígido sem atrito

Exemplo com 4 singularidades

Estável ou instável ?

Estabilidade local

Incerteza nas condições iniciais ...

... impossível predizer o comportamento futuro

Edward Norton Lorenz em 1992 :

“*Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil set off a Tornado in Texas ?*”

Caos !!!!...

Oscilador de van der Pol : modelizar a actividade oscilatória do coração humano

$$\frac{dx^2}{dt^2} - c(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad c>0$$

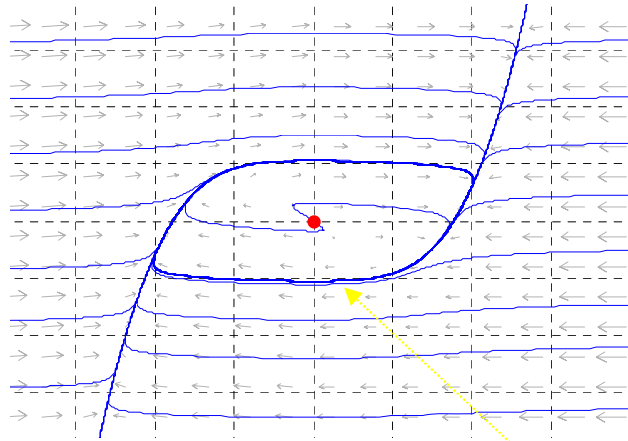
$$\frac{dx}{dt} = c\left(y - \frac{x^3}{3} + x\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{c}$$

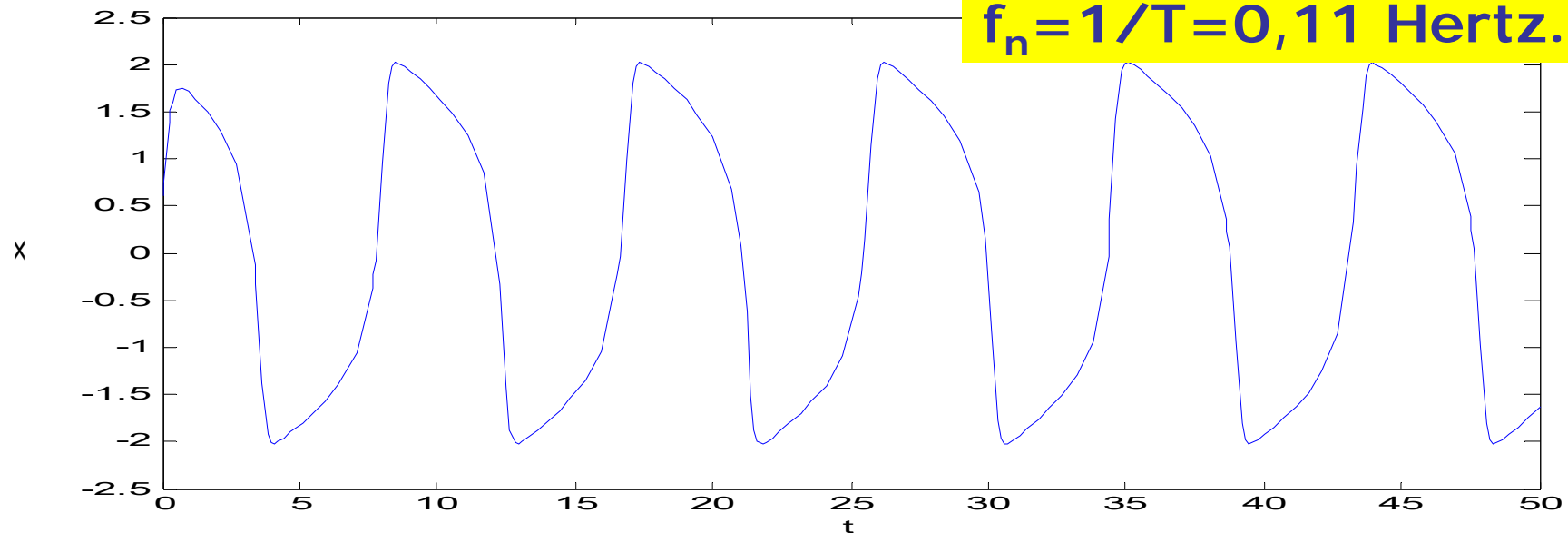
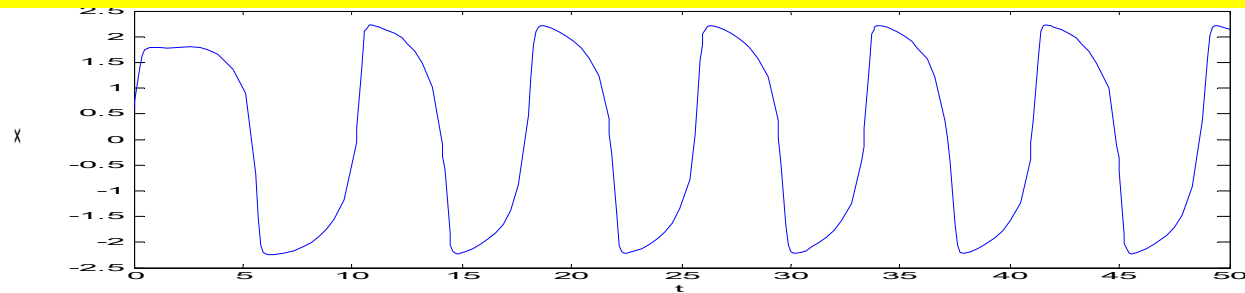
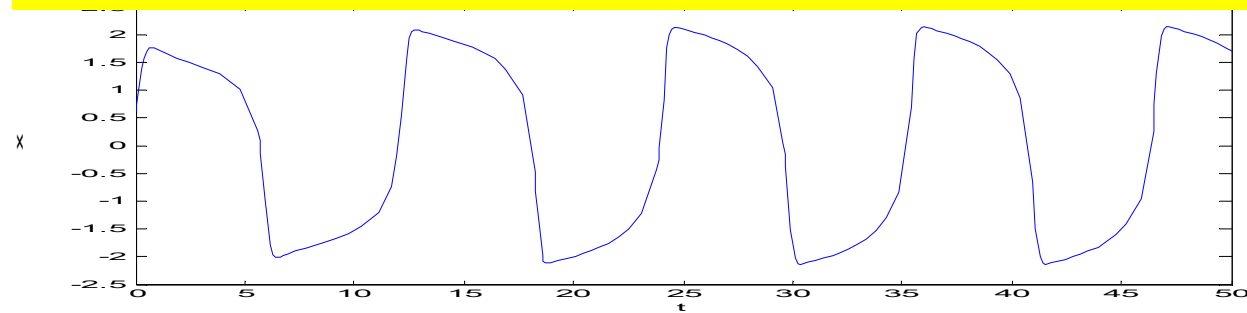
Com excitação externa:

$$\frac{dx}{dt} = c\left(y - \frac{x^3}{3} + x\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{c}(x - Bsen2\pi ft)$$

Sem excitação externa

$$\frac{dx}{dt} = c\left(y - \frac{x^3}{3} + x \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{c} \qquad [x_s, y_s] = [0,0]$$

um ciclo limite estável (*limit-cycle*)

Com excitação externa

... princípio do *pacemaker*

Sistemas oscilatórios não lineares

- se excitarmos o sistema com uma frequência muito afastada da sua frequência natural, o comportamento obtido resulta em geral num sinal aperiódico.

- se a frequência de excitação se aproxima da frequência natural, o oscilador “adota” a frequência de excitação.

- Esta propriedade é muito importante na prática: ela está na base dos *pacemakers* cardíacos.

- Também se verifica em :
  -adaptação dos ritmos biológicos ao ciclo dia-noite,
  -acoplamento entre a respiração e a pressão sanguínea,
  -sincronização dos geradores fisiológicos de padrões centrais
  durante a caminhada e a corrida.

- Outros fenómenos fisiológicos podem ser modelizados com recurso a osciladores não lineares. Por exemplo o oscilador de Poincaré é apropriado para simular as arritmias cardíacas.

Bifurcações e caos

Uma espécie biológica com efeito limitante:

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = A(x_k - x_k^2), \quad x \in [0,1]$$

k

k

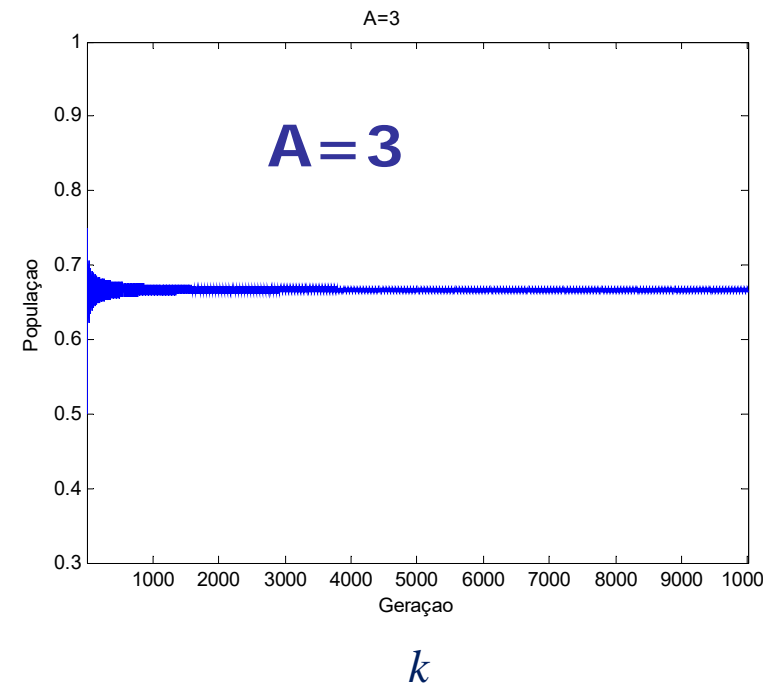
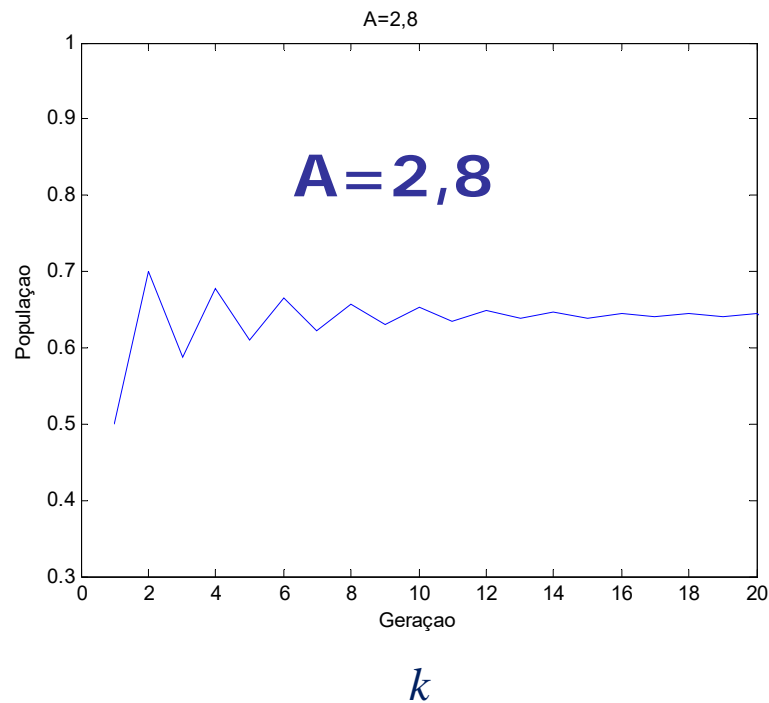
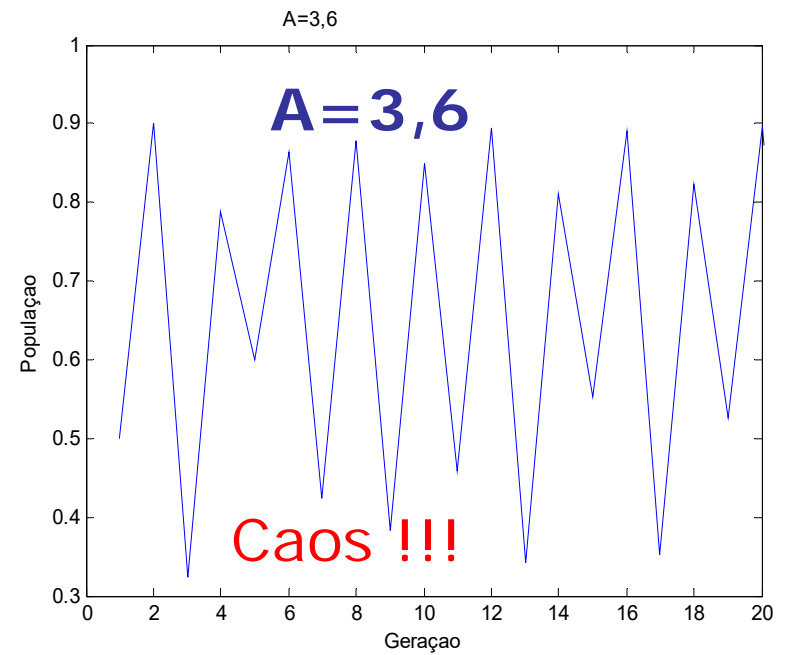
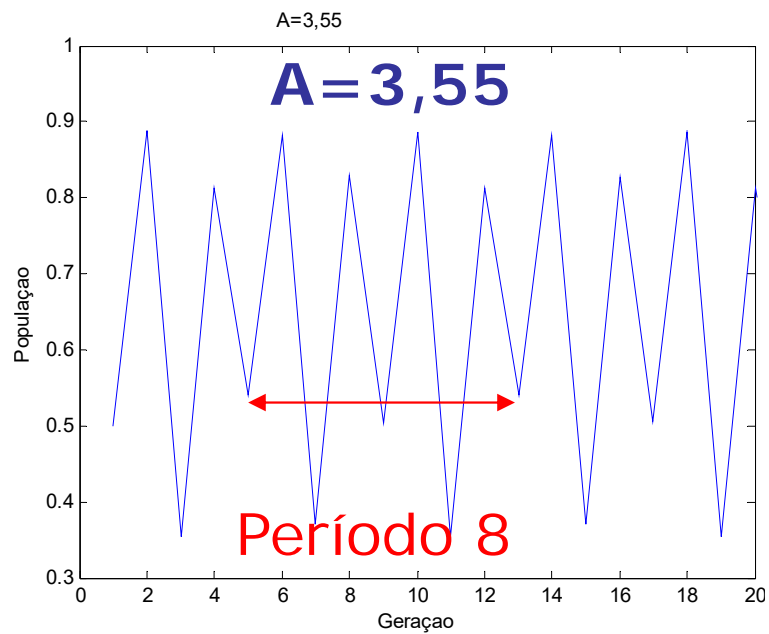
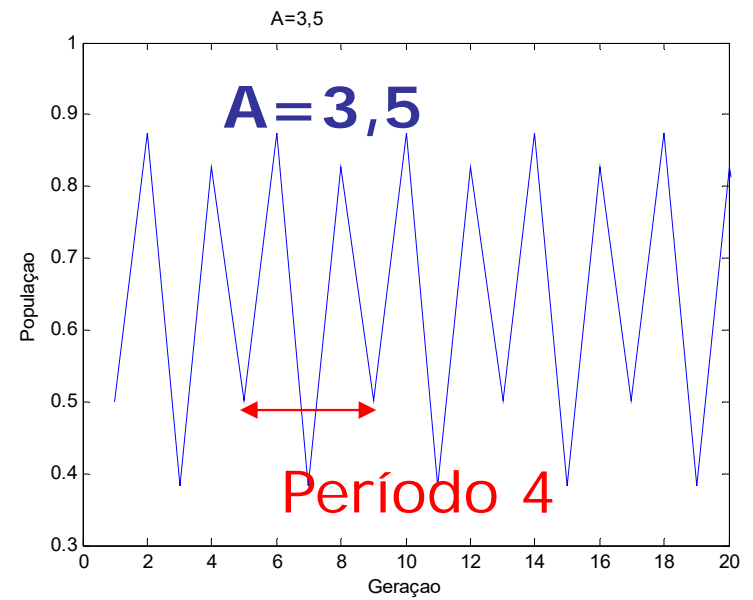
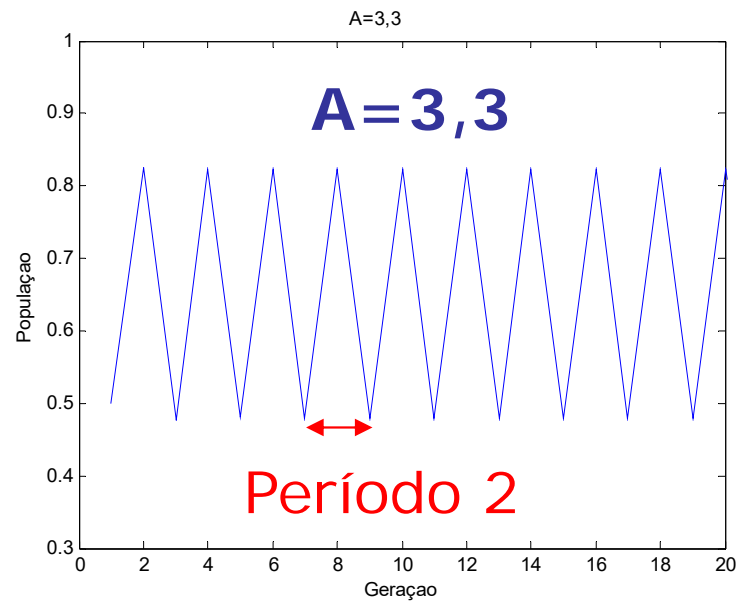
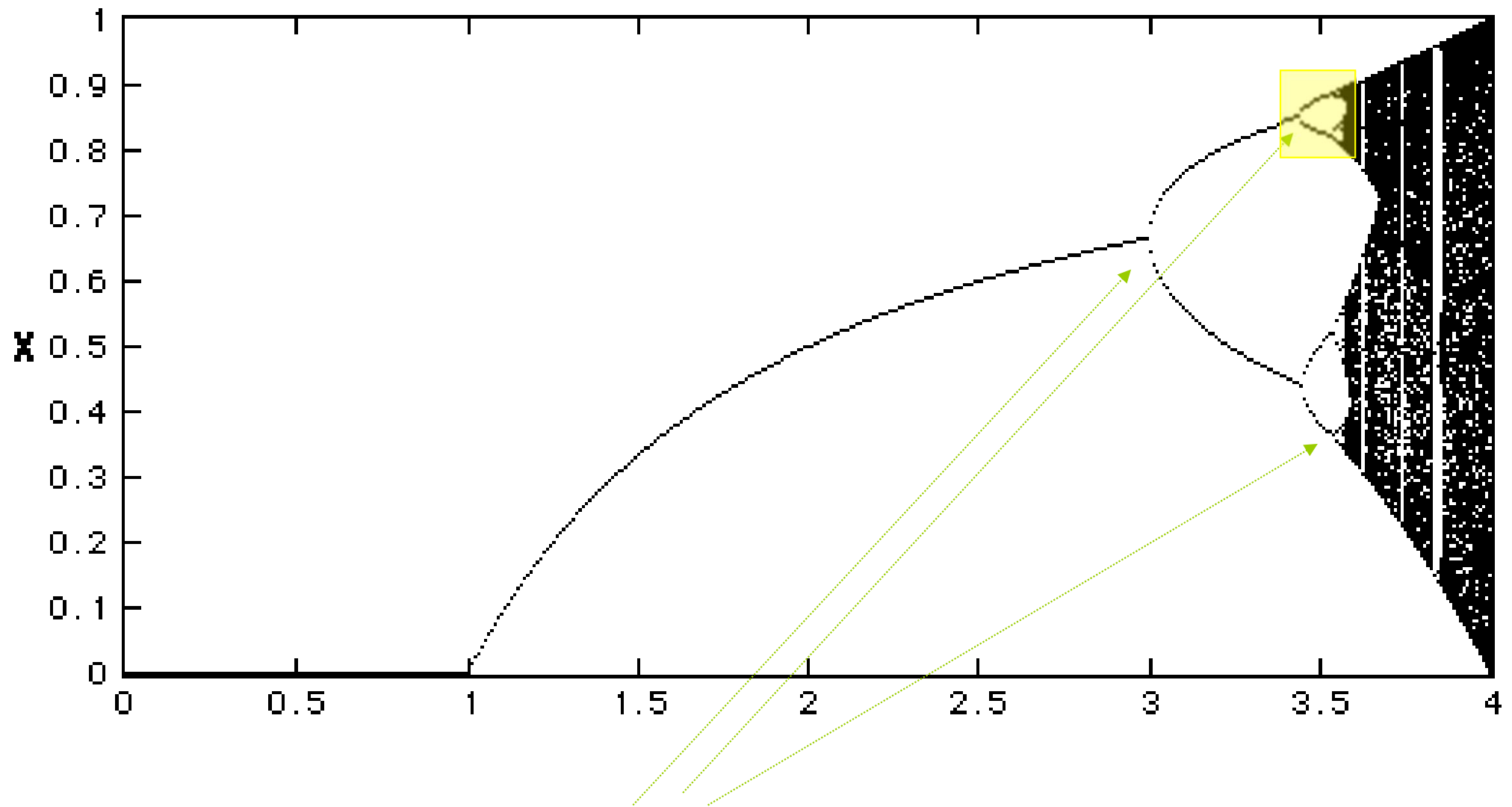
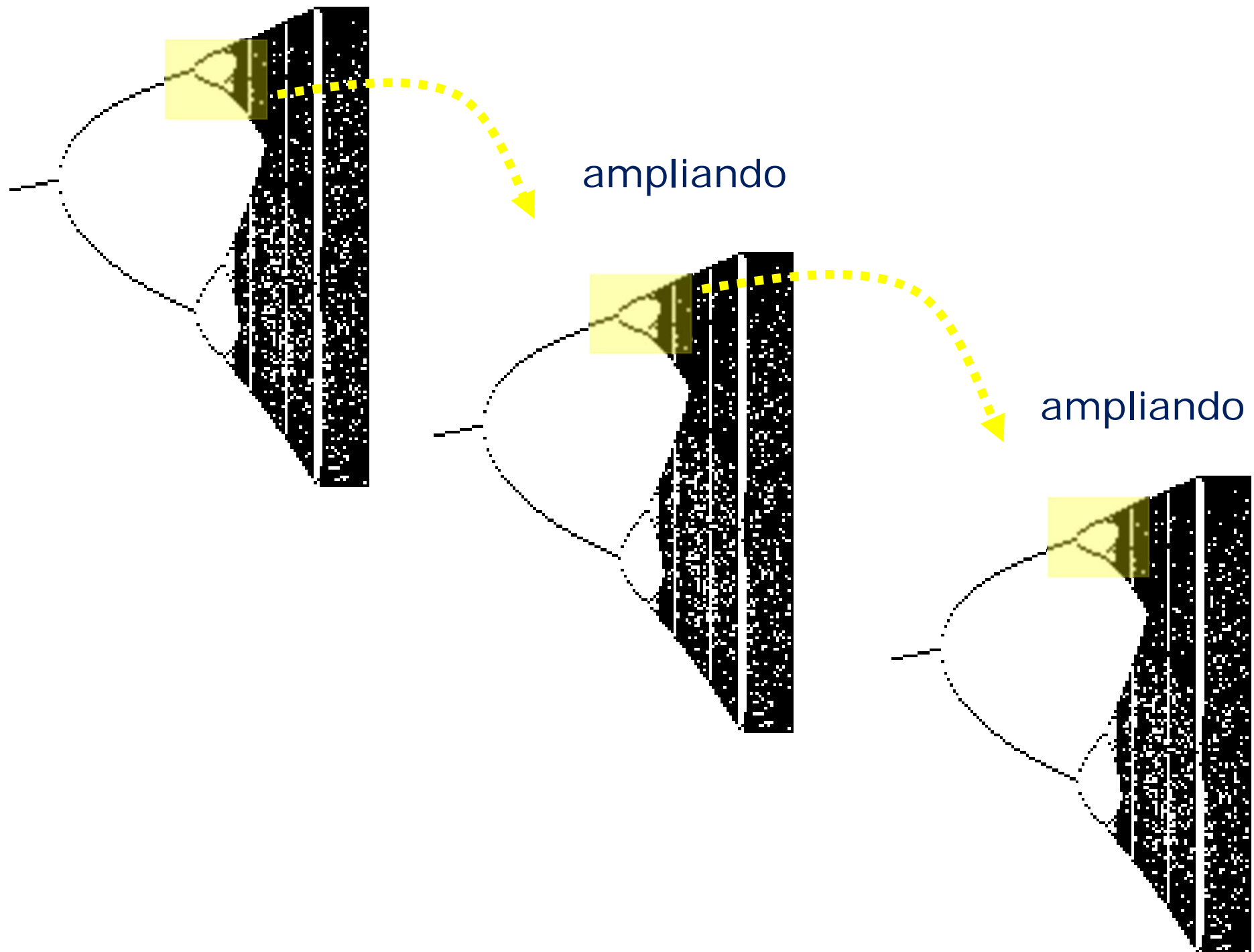
A=3,3
A=3,3
Período 2
População
Geraçao

A=3,5
A=3,5
Período 4
População
Geraçao

A=3,55
A=3,55
Período 8
População
Geraçao

A=3,6
A=3,6
Caos !!!
População
Geraçao

Bifurcações

ampliando
ampliando

O delta de Feigenbaum

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 4{,}66920161\ldots$$

Exemplos de sistemas fisiológicos com comportamento caótico

Regulação da densidade de neutrófilos no sangue

Variabilidade cardivascular

Conclusão

- Os sistemas não lineares permitem exprimir características importantes dos processos fisiológicos.

- O plano de fase (sistemas de 2ª ordem) permite analisar a estabilidade de cada ponto singular.

- Uma bifurcação é um ponto (no espaço dos parâmetros) em que o período de oscilação duplica.

- O comportamento caótico (caracterizado por ser aperiódico) está associado a sucessivas bifurcações, que definem o caminho para o caos produzido por variações de parâmetros do sistema.

- O número de Feigenbaum, considerado uma constante universal, permite encontrar as bifurcações.

Tudo o que estudámos é fundamental para modelizar processos fisiológicos:

- Analogias e sistemas análogos
- Obtenção das equações diferenciais
- Função de transferência
- Espaço de estados
- Curvas de fase
- Sistemas não lineares e comportamento caótico
- Implementação em Matlab/Simulink

Bibliografia

Khoo, Michael C . K., Physiological Control Systems, Analysis, Simulation and Estimation, 2nd Ed., IEEE Press Series in Biomedical Engineering, Wiley 2018, (1st Ed. 2000) (o livro indica como se pode descarregar a coleção de exemplos Matlab+Simulink).

Beuter, A., L. Glass, M.C. Mackey and M. S. Titcombe, Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, Springer Verlag New York, 2003.

Hilborn, R. C., Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford University Press, 1994.

Peitigen, H.O., H. Jurgens, and D. Saupe, Chaos and Fractals, the New Frontiers of Science, 2nd Ed. Springer- Verlag New York, 2004.
Versão atualizada para Matlab
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61636-pplane 5/08/2022
Ver em https://books.google.com/books?id=jVpS_u0Lg4gC&dq=isbn:0387202293
https://www.academia.edu/35829626/Chaos_and_Fractals_New_Frontiers_of_Science_Second_Edition

pplane is copyrighted by
John C. Polking, Department of Mathematics, Rice University.
Mais informação em : https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/ 5/08/2022

Versão atualizada para Matlab:
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61636-pplane 5/08/2022